

This item is the archived peer-reviewed author-version of:

Pair-breaking collective branch in BCS superconductors and superfluid Fermi gases

Reference:

Kurkjian Hadrien, Klimin Sergei, Tempere Jacques, Castin Y..- Pair-breaking collective branch in BCS superconductors and superfluid Fermi gases

Physical review letters - ISSN 0031-9007 - 122(2019), 093403

Full text (Publisher's DOI): <https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.122.093403>

To cite this reference: <https://hdl.handle.net/10067/1579660151162165141>

Collective branch in the continuum of BCS superconductors and superfluid Fermi gases

H. Kurkjian, S. N. Klimin and J. Tempere

TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Antwerpen, België

Y. Castin

*Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure, Université PSL,
CNRS, Sorbonne Université, Collège de France, Paris, France*

We demonstrate the existence of a collective excitation branch in the pair-breaking continuum of superfluid Fermi gases and BCS superconductors, as suggested by Littlewood and Varma in 1982. We analytically continue the RPA equation on the collective mode energy through its branch cut associated with the continuum, and obtain the full complex dispersion relation, including in the strong coupling regime. For $\Delta/\mu > 1.210$ (very close to unitarity in a superfluid Fermi gas), where Δ is the order parameter and μ the chemical potential, the real part of the branch is wholly within the band gap $[0, 2\Delta]$. In the long wavelength limit, the branch varies quadratically with the wave number, with a complex effective mass that we compute analytically. This contradicts the result of Littlewood and Varma that prevailed so far.

Introduction – Systems with a macroscopic coherence between pairs of fermions exhibit in their excitation spectrum a pair-breaking continuum, whose energy is greater than twice the order parameter Δ . This is particularly the case of superconductors and cold gases of spin-1/2 fermionic atoms. The collective behavior of these systems at energies lower than 2Δ is known: it is characterized by a bosonic excitation branch, of phononic start in neutral gases and plasmonic start in superconductors with Coulomb interactions [1]. The dispersion relation of this branch was calculated in the Random Phase Approximation (RPA) [2, 3] and its existence experimentally confirmed [4–6].

Conversely, the existence of a collective mode *inside* the pair-breaking continuum remains an open question that attracts a strong interest because of an analogy often suggested with the Higgs mode in field theory [7]. We identify two major shortcomings [8–10] in the existing theoretical treatment: (i) it is based on a particle-hole symmetry hypothesis and neglects the coupling between the amplitude and phase of the order parameter, which restricts it to the weak coupling regime, (ii) it is limited to long wavelengths. These shortcomings are prejudicial as they raise doubts about the very existence of this second collective mode [11], in particular at zero wave vector [12].

In this article, we clarify considerably the description of the collective modes of the continuum. By analytically continuing the order parameter Gaussian fluctuations matrix we reveal a pole in the propagator of Δ below the branch cut associated to the continuum, for positive chemical potential $\mu > 0$ and non-zero wave number only. We obtain the full dispersion relation of this mode completely accounting for amplitude-phase coupling. This allows us to deal with the strong coupling regime; in particular we show that the real part of the branch is fully in the band gap $[0, 2\Delta]$ when $\Delta > 1.210\mu$. In the weak

coupling and long wavelength limit, we disagree sharply with the prediction commonly accepted in the literature [10], in particular for the damping rate that, we find, has a quadratic start at low wave number, rather than a linear one. All our predictions are based on the RPA for contact interactions. This theory describes qualitatively well both cold Fermi gases in the BEC-BCS crossover and BCS superconductors (assuming that Coulomb interactions have no effect on the amplitude modes [10]), and is a prerequisite for any more realistic description of interactions.

The branch that we find describes the collective behavior of the pairs following an excitation of their internal degrees of freedom; its frequency is thus not trivially the edge of the continuum $2\Delta/\hbar$, as for the “Higgs oscillation” observed [12–18] at zero wave vector. It is observable in a superfluid Fermi gas using momentum-resolved Bragg spectroscopy, in the same way that Ref. [6] observed the Bogoliubov-Anderson mode. The pole in the analytic continuation results in a broadened peak at energy above 2Δ in the order parameter response function.

Fluctuations of the order parameter – We consider a homogeneous system of fermions of mass m , spin $\sigma = \uparrow / \downarrow$ and chemical potential μ , with attractive contact interactions. At zero temperature $T = 0$, the fluctuations of the order parameter Δ around its equilibrium value admit eigenmodes, which are the collective modes of the system. Expanding to second order in amplitude $\delta\lambda$ and phase $\delta\theta$ fluctuations yields the Gaussian action [19]

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \int d\omega \int d^3q \begin{pmatrix} -i\Delta\delta\theta^* & \delta\lambda^* \end{pmatrix} M(\omega, \mathbf{q}) \begin{pmatrix} i\Delta\delta\theta \\ \delta\lambda \end{pmatrix} \quad (1)$$

The fluctuation matrix M is symmetric and gives access to the propagator of the Δ field through a mere inversion. The equation giving the energy $z_{\mathbf{q}}$ of the collective modes

as a function of their wave vector \mathbf{q} is then

$$\det M(z, \mathbf{q}) = 0 \quad (2)$$

Since the order parameter Δ describes pair condensation, the coefficients of its fluctuation matrix contain an integral over the internal wave vector \mathbf{k} of the pairs, involving $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \mu$ and $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$, the dispersion relations of free fermions and BCS quasiparticles respectively, as well as the energy $E_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}$ of a pair of quasiparticles of total wave vector \mathbf{q} :

$$M_{\pm\pm}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} \left[\frac{(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm)^2}{z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} - \frac{(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm)^2}{z + E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} \right] \quad (3)$$

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \left[\frac{1}{z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} + \frac{1}{z + E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}} \right] \quad (4)$$

where the indices $+$ and $-$ refer to phase and amplitude fluctuations respectively and we introduce the notation $(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm)^2 = (E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \pm \Delta^2) / (2E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2})$.¹ Note that Eq. (2) is found also in the RPA [1, 20, 21], by a diagrammatic resummation [3] or by linearization of the time-dependent BCS equations [22].

Since Eq. (2) is invariant under the change of z to $-z$, we can restrict ourselves to $\text{Re } z \geq 0$. The matrix M then has a branch cut for $z \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$, originating in the terms having $z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ in the denominator in (3-4). As such, Eq (2) has at most one solution for fixed \mathbf{q} : it is real, below the continuum $\hbar\omega_{\text{B},\mathbf{q}} < \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$, and corresponds to the bosonic Anderson-Bogoliubov branch [3]. This is not what we are looking for here. The collective modes we want to characterize are *inside* the continuum, that is, *a priori* for $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. As in the textbook problem of a single atom coupled to the electromagnetic field [23], the correct way to obtain a solution to (2) in the presence of the continuum is to analytically continue the matrix M through its branch cut [8]. This is an opportunity for us to recall the beautiful prescription of Nozières [24, 25] on how to analytically continue a function of the form

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{z - \omega}, \quad (5)$$

analytic for $\text{Im } z \neq 0$ but exhibiting a branch cut on the real axis, wherever the spectral density $\rho(\omega)$ is non-zero. The non-analytic contribution to $M_{\sigma\sigma'}$, with $\sigma, \sigma' = \pm$, is naturally cast into this form with the spectral densities

$$\rho_{\sigma\sigma'}(\omega, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\sigma W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\sigma'} \delta(\hbar\omega - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}) \quad (6)$$

¹ with $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ > 0$ for all \mathbf{k} and $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- > 0$ if and only if $k^2 > 2m\mu/\hbar^2 - q^2/4$.

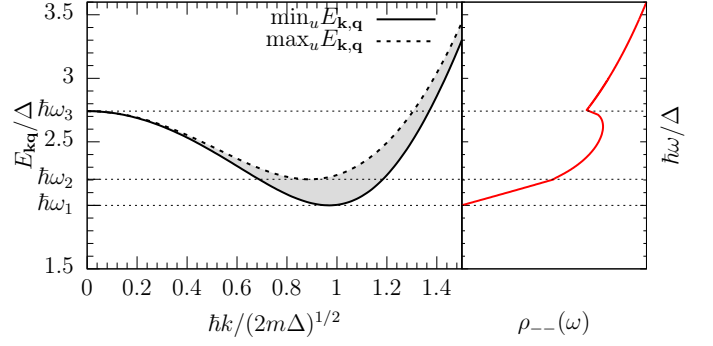


FIG. 1: As a function of k , the interval between $\min_u E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ (reached for $u = 0$, solid line on the left) and $\max_u E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ (reached for $u = \pm 1$, dashed line on the left) determines an energy band (gray area) in which the resonance $\hbar\omega = E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ occurs for at least one value of $u = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ in $[-1, 1]$. For fixed ω , the integration interval over k in (6) is read horizontally; as a function of ω , its structure undergoes 3 transitions in ω_1 , ω_2 and ω_3 (dotted lines), which result in angular points in the spectral density, here the example of ρ_{--} (red solid line on the right). In this figure, $\mu/\Delta = 1$ and $\hbar q/\sqrt{2m\Delta} = 0.5$.

The analytic continuation of f from the upper half-complex plane to the lower half-plane, through an interval $]\omega_1, \omega_2[$ of the branch cut where ρ is analytic, is simply

$$f_{\downarrow}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } \text{Im } z > 0 \\ f(z) - 2i\pi\rho(z) & \text{if } \text{Im } z \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

where $z \mapsto \rho(z)$ is the analytic continuation of ρ for $\text{Im } z \neq 0$. This is readily demonstrated by writing $\rho(\omega) = (\rho(\omega) - \rho(z)) + \rho(z)$ in (5).

To carry out the analytic continuation of M , we then study the function $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$, first on the real axis, and search for singularities. For that, we calculate the integral over \mathbf{k} in (6) in a spherical frame of axis \mathbf{q} . The integral over the azimuthal angle disappears by rotational invariance and we use the Dirac δ to perform the integral over the polar angle parametrized by $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}/kq$. The remaining integral over k is then restricted to a domain represented on Fig. 1, whose form depends on ω . When $\mu > 0$ the BCS excitation branch has its minimum in $k_0 = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$; then, for $0 < q < 2k_0$ the function $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$ has three angular points related to a configuration change of the integration domain, which divides the real axis in four distinct sectors (see Fig. 1). (i) For $\omega < \omega_1 = 2\Delta/\hbar$, the resonance condition $\hbar\omega = E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ is never satisfied, so that $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega < \omega_1) = 0$. This sector is outside the branch cut $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. (ii) For $\omega_1 < \omega < \omega_2$ the resonance is reached for $k \in [k_1, k_2]$, with

$$\frac{\hbar k_{1,2}}{(2m)^{1/2}} = \sqrt{\mu - \frac{\hbar^2 q^2}{8m} \pm \frac{\sqrt{\hbar^2 \omega^2 - 4\Delta^2}}{2}} \quad (8)$$

(iii) For $\omega_2 < \omega < \omega_3$, the resonance occurs for $k \in [k_1, k'_1] \cup [k'_2, k_2]$ where k_1 and k_2 are still given by (8) and

k'_1 and k'_2 are the real positive solutions of the polynomial equations

$$\tilde{\omega}^4 - 4\tilde{\omega}^2 P(\tilde{k}, \tilde{q}) + 4R^2(\tilde{k}, \tilde{q}) = 0 \quad \text{and} \quad \tilde{\omega}^2 - 2P(\tilde{k}, \tilde{q}) > 0 \quad (9)$$

with the polynomials $P(x, y) = (x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)^2 + x^2 y^2 + 1$ and $R(x, y) = 2xy(x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)$ and the notations $\tilde{k}^2 = \hbar^2 k^2/2m\Delta$, $\tilde{q}^2 = \hbar^2 q^2/2m\Delta$ and $\tilde{\omega} = \hbar\omega/\Delta$. (iv) For $\omega > \omega_3$, solutions k_1 and k'_1 are no longer real, and the integration interval is reduced to $[k'_2, k_2]$.

After this study the extension of $\rho_{\sigma\sigma'}$ to the complex plane is straightforward: we simply replace ω by z in Eqs. (8–9) giving the integration boundaries. $\rho_{\sigma\sigma'}(z)$ is then given by a line integral between complex boundaries. Now, using the Nozières prescription (7), we obtain an analytical continuation of M , where the angular points ω_1 , ω_2 and ω_3 become the branching points of three branch cuts.

Numeric study at arbitrary q – We find a solution $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} - i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}/2$ to Eq. (2) in the analytic continuation through the interval $[\omega_1, \omega_2]$, which we identify as the energy of the “Littlewood-Varma” collective mode we seek. The dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is represented on Fig. 2 for different pairing strength $\mu/\Delta = 1/10, 10$ and 100 ($1/k_F a \simeq 0.5, -1.5$ and -3.0 in a cold spin-1/2 Fermi gas with k_F the Fermi wave number and a the s -wave scattering length). Departing quadratically from its limit 2Δ in $q = 0$, the branch goes through a maximum of height proportional to Δ in the weak coupling regime $\Delta \ll \mu$, then plunges into the band gap $[0, 2\Delta]$ at $q = q_{\text{sup}}$. In the strong coupling regime $\Delta > \mu$, the domain $[0, q_{\text{sup}}]$ where the energy of the branch is greater than 2Δ shrinks, until its disappearance for $\mu/\Delta \simeq 0.8267$. Conversely, the damping rate $\Gamma_{\mathbf{q}}$ is a strictly increasing function of q , also starting quadratically from its zero limit in $q = 0$. This is in direct contrast with the commonly accepted prediction in the literature of a damping rate linear in q [10].

The branch disappears in $q = 2k_0$ (hence before the Bogoliubov-Anderson branch hits the continuum [3]) when the interval $[\omega_1, \omega_2]$ through which our analytic continuation passes is reduced to one point. Last, we exclude the existence of a branch of energy greater than $2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$ in the BEC regime where $\mu < 0$ and where the three singularities of $\rho_{\sigma\sigma'}$ gather, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{(|\mu| + \hbar^2 q^2/2m)^2 + \Delta^2}/\hbar$.

Long wavelength limit – In this limit, we obtain several analytical results that corroborate our numerical study. We deal separately with the singular case $q = 0$, where the matrix $M(z, \mathbf{q} = 0)$ is expressible in terms of the complete elliptic functions of the first and third kind, $K(k)$ and $\Pi(n, k)$ [26]:

$$\begin{aligned} \text{th}\zeta \tilde{M}_{++}(z, 0) &= \frac{\tilde{M}_{--}(z, 0)}{\text{th}\zeta} = -\pi(2e^t)^{1/2} [F(\zeta) - F(-\zeta)] \\ \tilde{M}_{+-}(z, 0) &= -\pi(2e^t)^{1/2} [F(\zeta) + F(-\zeta)] \end{aligned} \quad (10)$$

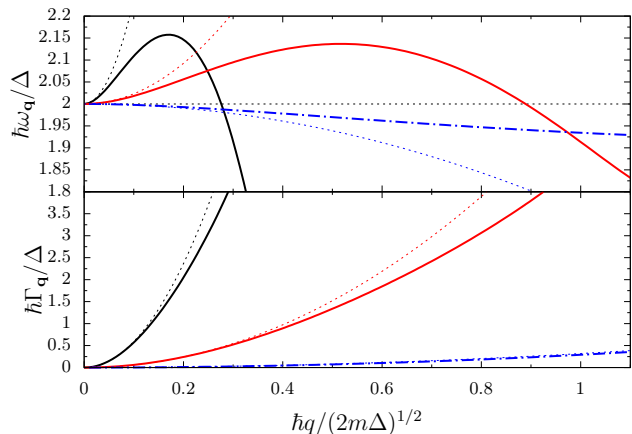


FIG. 2: Frequency (top) and damping rate (bottom) of the gapped continuum collective modes as functions of their wave number q for $\mu/\Delta = 100$ ($1/k_F a \simeq -3.0$, black solid curve), $\mu/\Delta = 10$ ($1/k_F a \simeq -1.5$, red solid curve) and $\mu/\Delta = 0.1$ ($1/k_F a \simeq 0.5$, blue dashed-dotted curve). The dotted curves show the behavior quadratic in q at low q obtained analytically from Eqs. (12)-(16).

with variables defined by $\mu/\Delta = \text{sh } t$ and $z = 2\Delta \text{ch } \zeta$, ζ constrained by $\text{Re } \zeta \geq 0$ and $-\pi/2 \leq \text{Im } \zeta \leq \pi/2$, and ²

$$F(\zeta) = (\text{sh } t + \text{sh } \zeta) [\Pi(e^{t+\zeta}, ie^t) - \Pi(-e^{t-\zeta}, ie^t)] + K(ie^t) \text{ch } \zeta \quad (11)$$

Eq. (2) then reads simply $F(\zeta)F(-\zeta) = 0$. The only solution to this equation, even after analytic continuation³ of $F(\zeta)$, is $\zeta = \pm i\pi/2$ (that is $z = 0$): this is the starting point of the phononic Anderson-Bogoliubov branch. Thus, the limit $\omega = 2\Delta/\hbar$ in $q = 0$ of the continuum collective branch is not a solution of (2): $F(\zeta)$ has a finite non-zero limit $F(0)$ when $\zeta \rightarrow 0$ with $\text{Im } z > 0$. For $q = 0$, there is therefore no collective mode of angular frequency $2\Delta/\hbar$, and the oscillations observed [15–18] at this frequency correspond simply to the edge of the pair-breaking continuum, as understood by Refs. [9, 12, 13]. Here the collective behavior manifests itself rather in the power-law damping of the oscillations [13, 14].

For small but not zero q , and $\mu > 0$, the resonance sector between $\hbar\omega_1 = 2\Delta$ and $\hbar\omega_2 = 2\Delta + \mu\hbar^2 q^2/2m\Delta + O(q^4)$ in Fig. 1 has a width $O(q^2)$ in energy, and $O(q)$ in the wave number k around the minimum $k_0 = \sqrt{2m\mu}/\hbar^2$ of the BCS branch. We then set

$$z_{\mathbf{q}} = 2\Delta + Z \frac{\hbar^2 q^2}{4m^*} + O(q^3) \quad \text{and} \quad k = k_0 + Kq \quad (12)$$

² Using the spectral densities $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega)$, we express $M_{\sigma\sigma'}(z, 0)$ as an integral over ω . The change of variable $\hbar\omega = \Delta(x^2 + 1/x^2)$, $0 < x < 1$ leads to elliptic integrals (see §8.110 of [26]).

³ The branch cut $[2\Delta, +\infty[$ (respectively $[2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}, +\infty[$) in z translates into a branch $[0, +\infty[$ in ζ for $\mu > 0$ (respectively $[-t, +\infty[$ for $\mu < 0$).

with $m^* = m\Delta/2\mu$ the effective mass of the BCS branch near its minimum. We thus focus our attention on the domain of wave vectors where the denominator in (3,4) is of order q^2 :

$$z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = z - 2\Delta - \frac{\hbar^2 q^2}{m^*} (K^2 + u^2/4) + O(q^3) \quad (13)$$

Now, using the expansions of the numerator amplitudes $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ \sim 1$ and $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \sim \hbar^2 k_0 q K / m\Delta$, and performing the integral over the angular variable u before that over K we obtain without difficulty the analytic expressions for $\text{Im } z > 0$:

$$\tilde{M}_{++}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 k_\Delta}{q} \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} + O(1) \quad (14)$$

$$\tilde{M}_{--}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 \mu q}{2\Delta k_\Delta} \left[\sqrt{Z-1} + Z \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] + O(q^2) \quad (15)$$

where we introduce $k_\Delta = \sqrt{2m\Delta/\hbar^2}$ and the dimensionless integrals $\tilde{M}_{\sigma\sigma'} = M_{\sigma\sigma'}\Delta/k_\Delta^3$. Since the divergence of M_{++} of order $1/q$ is compensated by the suppression of M_{--} linear in q , the finite non-zero limit (10) of M_{+-} in $q = 0$, $\hbar\omega = 2\Delta$ suffices. All that remains is to insert expressions (10,14,15) in the RPA equation (2) and analytically continue the product $M_{++}M_{--}$ through its branch cut $[0, 1]$ in Z (corresponding to the segment $[\hbar\omega_1, \hbar\omega_2]$ in z) with the substitutions $\text{asin} 1/\sqrt{Z} \rightarrow \pi - \text{asin} 1/\sqrt{Z}$ and $\sqrt{Z-1} \rightarrow -\sqrt{Z-1}$ to obtain an explicit yet transcendental equation on Z :

$$\left[\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] \left[Z \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right) - \sqrt{Z-1} \right] + \frac{2}{\pi^4 \mu} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^3 M_{+-}^2(2\Delta, 0) = 0 \quad (16)$$

The continuation is for the entire lower half-plane, including $\text{Re } z < 2\Delta$ ($\text{Re } Z < 0$). The unique solution of Eq. (16) faithfully reproduces the coefficient of q^2 in Fig. 2; it is represented in Fig. 3 as a function of μ/Δ . The real part changes sign for $\mu/\Delta \simeq 0.8267$, which confirms the existence of a branch of energy below 2Δ in the strong coupling regime. One should not overinterpret the existence of solutions below 2Δ : they remain separated from the segment $[0, 2\Delta]$ of the real axis by a branch cut, so that their effect is felt near the real axis only at energies greater than 2Δ .

In the weak coupling limit $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$, M_{+-} tends to zero because of particle-hole symmetry $k \leftrightarrow k_0 - k$, so the RPA equation reduces to $M_{++}M_{--} = 0$ for $q \neq 0$, and Eq. (16) to its Z -dependent first line. As suggested in [10], the Littlewood-Varma collective mode is then a pure amplitude mode (a root of M_{--}), while the phononic phase mode is given by $M_{++} = 0$. However, we obtain a very different dispersion relation

$$z_{\mathbf{q}} \underset{\mu/\Delta \rightarrow +\infty}{\underset{q \rightarrow 0}{\simeq}} 2\Delta + (0.2369 - 0.2956i) \frac{\hbar^2 q^2}{4m^* \Delta} \quad (17)$$

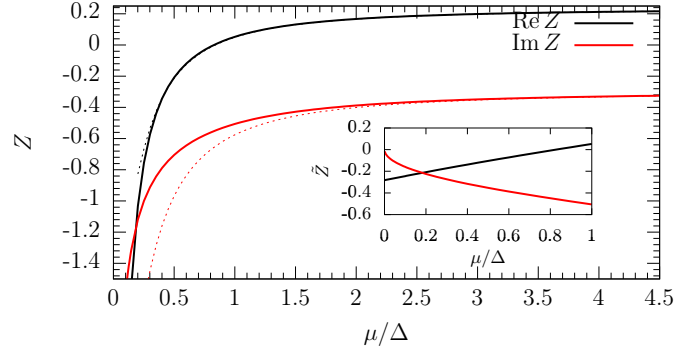


FIG. 3: The real (black solid curve) and imaginary (red solid curve) parts of the dimensionless coefficient Z of q^2 in the energy $z_{\mathbf{q}}$ of the “Littlewood-Varma” mode are represented as functions of μ/Δ . The dashed curves give the asymptotic expansion in the weak coupling limit $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$: $Z = Z_0 - \frac{2Z_0^2}{Z_0 - 1} \left(\frac{\Delta}{\pi\mu} \right)^2 \ln^2 \frac{\Delta}{8\mu e} + \dots$ with $Z_0 = 0.2369 - 0.2956i$. The inset shows the rescaled coefficient $\tilde{Z} = Z\mu/\Delta = Zm/2m^*$ which admits the finite real limit $\tilde{Z}_\infty = -16K^2(i)/\pi^4 \simeq -0.2823$ in the strong coupling limit $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, its imaginary part tending to zero like $-12K(i)(\mu/\Delta)^{1/2}/\pi^3$.

where even the real part of Z differs from the $2/3$ of [10].

Our calculation shows the limits of the usual analogy with Higgs modes in field theory: although it is also a gapped amplitude mode in the weak coupling limit, the collective mode, here immersed in a continuum, is obtained only after a non-perturbative treatment of the coupling to fermionic degrees of freedom; impossible therefore to obtain it from a low-energy effective action as suggested sometimes [7, 27].

Observability in the response functions – The collective branch that we predict appears in the response functions of the system. We show in Fig. 4 the example of the order parameter response function $|N/\det M|(\omega + i0^+, \mathbf{q})$ with $N = (M_{++} + M_{--})/2 + M_{+-}$, obtained from the amplitude and phase response functions by the change of variable $\delta\Delta = \delta\lambda + \Delta i\delta\theta$. At low q , when the mode is weakly damped, the branch obtained in the analytic continuation remarkably predicts the position of a broadened peak in the response function. We note with great interest that Ref. [6] observes such a peak in its measurements of the density-density response function. This may well be our collective branch, particularly if the q^2 dependence of the peak location at low q was confirmed.

Conclusion – We have established on solid theoretical foundations the existence of a collective branch inside the pair-breaking continuum of a BCS superconductor and superfluid Fermi gas, and we have fully characterized its dispersion relation and damping rate in the RPA. We thus give a clear and rigorous answer to an old condensed matter problem. Our branch appears clearly in the response functions of the system and can therefore

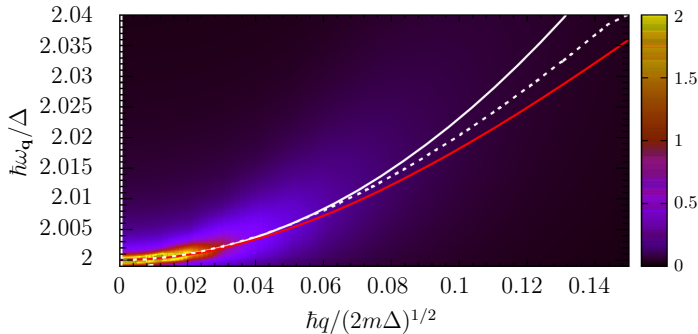


FIG. 4: The intensity of the pairing field response function is represented in colors and arbitrary units as a function of q and ω in the BCS regime ($\mu/\Delta = 10$). The top of a peak in the function (white dashed curve) is well reproduced at low q by the collective branch of the analytic continuation (red solid curve and white solid curve for its quadratic approximation (12)).

be measured in a cold atom gas by Bragg spectroscopy.

-
- [1] P.W. Anderson. Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
- [2] M. Marini, F. Pistolesi, and G.C. Strinati. Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation: analytic results for the crossover in three dimensions. *European Physical Journal B*, 1:151–159, 1998.
- [3] R. Combescot, M. Yu. Kagan, and S. Stringari. Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, October 2006.
- [4] K. Kadowaki, I. Kakeya, M. B. Gaifullin, T. Mochiku, S. Takahashi, T. Koyama, and M. Tachiki. Longitudinal Josephson-plasma excitation in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$: Direct observation of the Nambu-Goldstone mode in a superconductor. *Phys. Rev. B*, 56:5617–5621, September 1997.
- [5] J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov, and J. E. Thomas. Measurement of Sound Velocity in a Fermi Gas near a Feshbach Resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 98:170401, April 2007.
- [6] Sascha Hoinka, Paul Dyke, Marcus G. Lingham, Jami J. Kinnunen, Georg M. Bruun, and Chris J. Vale. Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids. *Nature Physics*, 13:943–946, June 2017.
- [7] David Pekker and C.M. Varma. Amplitude/Higgs Modes in Condensed Matter Physics. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 6(1):269–297, 2015.
- [8] Albert Schmid. The approach to equilibrium in a pure superconductor. The relaxation of the Cooper pair density. *Physik der kondensierten Materie*, 8(2):129–140, November 1968.
- [9] I. O. Kulik, Ora Entin-Wohlman, and R. Orbach. Pair susceptibility and mode propagation in superconductors: A microscopic approach. *Journal of Low Temperature Physics*, 43(5):591–620, Jun 1981.
- [10] P. B. Littlewood and C. M. Varma. Amplitude collective modes in superconductors and their coupling to charge-density waves. *Phys. Rev. B*, 26:4883–4893, November 1982.
- [11] T. Cea, C. Castellani, and L. Benfatto. Nonlinear optical effects and third-harmonic generation in superconductors: Cooper pairs versus Higgs mode contribution. *Phys. Rev. B*, 93:180507, May 2016.
- [12] R. G. Scott, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Rapid ramps across the BEC-BCS crossover: A route to measuring the superfluid gap. *Phys. Rev. A*, 86:053604, November 2012.
- [13] A.F. Volkov and Ch. M. Kogan. Collisionless relaxation of the energy gap in superconductors. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 65:2038, 1973.
- [14] V. Gurarie. Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 103:075301, August 2009.
- [15] Ryusuke Matsunaga, Yuki I. Hamada, Kazumasa Makise, Yoshinori Uzawa, Hirota Terai, Zhen Wang, and Ryo Shimano. Higgs Amplitude Mode in the BCS Superconductors $\text{Nb}_{1-x}\text{Ti}_x\text{N}$ Induced by Terahertz Pulse Excitation. *Phys. Rev. Lett.*, 111:057002, July 2013.
- [16] M.-A. Méasson, Y. Gallais, M. Cazayous, B. Clair, P. Rodière, L. Cario, and A. Sacuto. Amplitude Higgs mode in the $2H - \text{NbSe}_2$ superconductor. *Phys. Rev. B*, 89:060503, February 2014.
- [17] A. F. Kemper, M. A. Sentef, B. Moritz, J. K. Freericks, and T. P. Devereaux. Direct observation of Higgs mode oscillations in the pump-probe photoemission spectra of electron-phonon mediated superconductors. *Phys. Rev. B*, 92:224517, December 2015.
- [18] K. Gao, C. Kollath, and M. Köhl. Observation of the Higgs mode in strongly interacting Fermi gases. To appear in *Nature Physics*.
- [19] Roberto B. Diener, Rajdeep Sensarma, and Mohit Randeria. Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover. *Phys. Rev. A*, 77:023626, February 2008.
- [20] Hadrien Kurkjian and Jacques Tempere. Absorption and emission of a collective excitation by a fermionic quasiparticle in a Fermi superfluid. *New Journal of Physics*, 19(11):113045, 2017.
- [21] H. Kurkjian. *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*. PhD thesis, École Normale Supérieure, Paris, 2016.
- [22] H. Kurkjian, Y. Castin, and A. Sinatra. Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas. *Annalen der Physik*, 529(9):1600352, 2017.
- [23] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [24] Philippe Nozières. *Le problème à N corps: propriétés générales des gaz de fermions*. Dunod, Paris, 1963.
- [25] Francesco Matera and Matthias F. Wagner. Low-energy modes of spin-imbalanced Fermi gases in BCS phase. *The European Physical Journal D*, 71(11):293, November 2017.
- [26] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [27] Boyang Liu, Hui Zhai, and Shizhong Zhang. Evolution of the Higgs mode in a fermion superfluid with tunable

interactions. Phys. Rev. A, 93:033641, March 2016.

Branche d'excitation collective du continuum dans les supraconducteurs BCS et les gaz de fermions superfluides

H. Kurkjian, S. Klimin et J. Tempere

TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Antwerpen, België

Y. Castin

*Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure, Université PSL,
CNRS, Sorbonne Université, Collège de France, Paris, France*

Nous montrons l'existence d'une branche d'excitation collective dans le continuum de brisure de paires des gaz de fermions superfluides et des supraconducteurs BCS, comme pressenti par Littlewood et Varma en 1982. Nous prolongeons analytiquement l'équation de la RPA donnant l'énergie des modes collectifs à travers sa ligne de coupure associée au continuum, et obtenons l'intégralité de la relation de dispersion complexe, y compris dans le régime de couplage fort. Pour $\Delta/\mu > 1,210$ (très proche de la limite unitaire dans un gaz de fermions superfluide), où Δ est le paramètre d'ordre et μ le potentiel chimique, la partie réelle de la branche est intégralement située dans la bande interdite $[0, 2\Delta]$. Dans la limite des grandes longueurs d'ondes, la branche varie quadratiquement avec le nombre d'onde, avec une masse effective complexe que nous calculons analytiquement. Ceci contredit le résultat de Littlewood et Varma qui prévalait jusqu'ici.

Introduction – Les systèmes dans lesquels une cohérence macroscopique s'établit entre paires de fermions présentent naturellement dans leur spectre d'excitation un continuum lié à la rupture de ces paires, dont l'énergie est supérieure à deux fois le paramètre d'ordre Δ . C'est le cas notamment des supraconducteurs et des gaz froids d'atomes fermioniques de spin $1/2$. Le comportement collectif de ces systèmes aux énergies inférieures à 2Δ est connu : il se caractérise par une branche bosonique d'excitation, de départ phononique dans les gaz neutres, ou plasmonique dans les supraconducteurs avec interactions de Coulomb [1]. La relation de dispersion a été calculée dans l'approximation de la phase aléatoire (RPA) [2, 3] et l'existence de la branche confirmée expérimentalement [4–6].

À l'inverse, la question de l'existence d'un mode collectif *dans* le continuum de brisure de paires, qui suscite un fort intérêt en raison d'une analogie souvent avancée avec le mode de Higgs en théorie des champs [7], n'a pas reçu de réponse définitive. Nous identifions deux lacunes majeures dans le traitement théorique [8–10] de ce mode : (i) il repose sur une hypothèse de symétrie particule-trou et néglige le couplage entre l'amplitude et la phase du paramètre d'ordre, ce qui le restreint au régime de couplage faible, (ii) il est limité aux grandes longueurs d'onde. Ces lacunes sont préjudiciables car elles engendrent des doutes sur l'existence même de ce mode [11], en particulier à vecteur d'onde nul [12].

Dans cet article, nous clarifions considérablement la description des modes collectifs du continuum. En prolongeant analytiquement la matrice des fluctuations gaussiennes du paramètre d'ordre, nous faisons apparaître un pôle dans le propagateur de Δ sous la ligne de coupure associée au continuum, pour un potentiel chimique $\mu > 0$ et à vecteur d'onde non nul uniquement. Nous obtenons la relation de dispersion complète de ce mode sans négliger

le couplage amplitude-phase. Ceci nous permet de traiter le régime de couplage fort ; en particulier nous voyons la partie réelle de la branche être intégralement dans la bande interdite $[0, 2\Delta]$ lorsque $\Delta > 1,210\mu$. Dans la limite de couplage faible et des grandes longueurs d'onde, nous sommes en désaccord net avec la prédiction communément acceptée dans la littérature [10], en particulier pour le taux d'amortissement que nous trouvons de départ quadratique en le nombre d'onde, et non pas linéaire. Toutes nos prédictions sont fondées sur la RPA pour des interactions de contact. Cette théorie décrit qualitativement bien tant les gaz de fermions froids dans le raccordement CBE-BCS que les supraconducteurs BCS (en admettant que les interactions de Coulomb sont sans effet sur les modes collectifs d'amplitude [10]) et est un préalable à toute description plus réaliste des interactions.

La branche que nous trouvons décrit le comportement collectif des paires suite à une excitation de leurs degrés de liberté internes ; sa pulsation n'est donc pas trivialement celle du bord du continuum $2\Delta/\hbar$, comme pour les « oscillations de Higgs » observées [12–18] à vecteur d'onde nul. Elle est observable dans un gaz de fermions superfluide par spectroscopie de Bragg résolue en impulsion, de la même façon que la référence [6] a observé le mode de Bogolioubov-Anderson. Le pôle dans le prolongement analytique se traduit par l'apparition d'un pic élargi dans la fonction de réponse du paramètre d'ordre.

Fluctuations du paramètre d'ordre – Nous considérons un système homogène de fermions de masse m , de spin $\sigma = \uparrow / \downarrow$ et de potentiel chimique μ , en interactions attractives de contact. À température nulle $T = 0$, les fluctuations du paramètre d'ordre Δ autour de sa valeur d'équilibre admettent des modes propres, qui sont les modes collectifs du système. En développant au second ordre en les fluctuations d'amplitude $\delta\lambda$ et de phase $\delta\theta$

on obtient l'action gaussienne [19]

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \int d\omega \int d^3q (i\Delta\delta\theta_{-\mathbf{q}} \delta\lambda_{-\mathbf{q}}^*) M(\omega, \mathbf{q}) \begin{pmatrix} -i\Delta\delta\theta_{\mathbf{q}} \\ \delta\lambda_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

La matrice M des fluctuations est symétrique et donne accès au propagateur du champ Δ par une simple inversion. L'équation donnant l'énergie $z_{\mathbf{q}}$ des modes collectifs en fonction de leur vecteur d'onde \mathbf{q} s'écrit donc

$$\det M(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0 \quad (2)$$

Le paramètre d'ordre Δ étant relié à la condensation de paires, les coefficients de sa matrice de fluctuations contiennent une intégrale sur le vecteur d'onde interne \mathbf{k} des paires, faisant intervenir $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \mu$ et $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}$ les relations de dispersion des fermions libres et des quasi-particules BCS respectivement, ainsi que l'énergie d'une paire d'excitations de vecteur d'onde total \mathbf{q} , $E_{\mathbf{kq}} = E_{\mathbf{k+q}/2} + E_{\mathbf{k-q}/2}$:

$$M_{\pm\pm}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} \left[\frac{(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2}{z - E_{\mathbf{kq}}} - \frac{(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2}{z + E_{\mathbf{kq}}} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}}} \right] \quad (3)$$

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^- \left[\frac{1}{z - E_{\mathbf{kq}}} + \frac{1}{z + E_{\mathbf{kq}}} \right] \quad (4)$$

où les indices $+$ et $-$ se rapportent respectivement aux fluctuations de phase et d'amplitude et nous introduisons la notation $(W_{\mathbf{kq}}^{\pm})^2 = (E_{\mathbf{k+q}/2} E_{\mathbf{k-q}/2} + \xi_{\mathbf{k+q}/2} \xi_{\mathbf{k-q}/2} \pm \Delta^2) / (2E_{\mathbf{k+q}/2} E_{\mathbf{k-q}/2})$.¹ Relevons que l'équation (2) se retrouve à l'identique dans la RPA [1, 20, 21], par resommation de diagrammes [3] ou par linéarisation des équations BCS dépendant du temps [22].

L'équation (2) étant invariante par changement de z en $-z$, nous pouvons nous restreindre à $\text{Re } z \geq 0$. La matrice M admet alors une ligne de coupure pour $z \in \mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{E_{\mathbf{kq}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$, provenant des termes ayant $z - E_{\mathbf{kq}}$ au dénominateur dans (3-4). Telle quelle, l'équation (2) admet au plus une solution à \mathbf{q} fixé : celle-ci est réelle, d'énergie inférieure au continuum $\hbar\omega_{\text{B},\mathbf{q}} < \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$ et correspond à la branche bosonique d'Anderson-Bogoliubov [3]. Ce n'est pas ce que nous cherchons. Les modes collectifs que nous voulons caractériser se trouvent *dans* le continuum, c'est-à-dire *a priori* pour $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > \min \mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. Comme dans le cas d'école d'un atome couplé au rayonnement électromagnétique [23], la bonne façon d'obtenir une solution à (2) en présence du continuum est de prolonger analytiquement la matrice M à travers sa ligne de coupure [8]. Ceci est l'occasion pour nous de rappeler la très belle prescription de Nozières [24, 25] pour prolonger

analytiquement une fonction de la forme

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\rho(\omega)}{z - \omega}, \quad (5)$$

analytique pour $\text{Im } z \neq 0$ mais présentant une ligne de coupure sur l'axe réel, en tout point où la densité spectrale $\rho(\omega)$ est non nulle. La contribution non analytique à $M_{\sigma\sigma'}$, avec $\sigma, \sigma' = \pm$, se met naturellement sous la forme (5) avec la densité spectrale

$$\rho_{\sigma\sigma'}(\omega, \mathbf{q}) = \int \frac{d^3k}{2} W_{\mathbf{kq}}^{\sigma} W_{\mathbf{kq}}^{\sigma'} \delta(\hbar\omega - E_{\mathbf{kq}}) \quad (6)$$

Le prolongement analytique de f du demi-plan complexe supérieur au demi-plan inférieur, à travers un intervalle $]\omega_1, \omega_2[$ de la ligne de coupure où la fonction ρ est analytique, s'écrit simplement

$$f_{\downarrow}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } \text{Im } z > 0 \\ f(z) - 2i\pi\rho(z) & \text{si } \text{Im } z \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

où $z \mapsto \rho(z)$ est le prolongement analytique de ρ pour $\text{Im } z \neq 0$. On s'en convainc sans mal en écrivant $\rho(\omega) = (\rho(\omega) - \rho(z)) + \rho(z)$ dans (5).

Pour effectuer le prolongement analytique de M , il nous faut donc étudier la fonction $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$ en premier lieu sur l'axe réel, en cherchant les singularités de la fonction et de ses dérivées. Pour cela, nous calculons l'intégrale sur \mathbf{k} dans (6) dans un repère sphérique d'axe \mathbf{q} . L'intégrale sur l'angle azimutal disparaît par invariance par rotation et nous utilisons le Dirac pour effectuer l'intégrale sur l'angle polaire paramétré par $u = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} / kq$. L'intégrale restante sur k est alors restreinte à un domaine représenté sur la figure 1, dont la forme dépend de ω . Lorsque $\mu > 0$ la branche d'excitation BCS possède son minimum en $k_0 = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$; pour $0 < q < 2k_0$, la fonction $\omega \mapsto \rho_{\sigma\sigma'}$ possède alors trois points anguleux liés à un changement de configuration de ce domaine, ce qui découpe l'axe réel en quatre secteurs distincts (voir la figure 1). (i) Pour $\omega < \omega_1 = 2\Delta/\hbar$, la condition de résonance $\hbar\omega = E_{\mathbf{kq}}$ n'est jamais vérifiée si bien que $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega < \omega_1) = 0$. Ce secteur est en dehors de la ligne de coupure $\mathcal{C}_{\mathbf{q}}$. (ii) Pour $\omega_1 < \omega < \omega_2$ la résonance est atteinte pour $k \in [k_1, k_2]$, avec

$$\frac{\hbar k_{1,2}}{(2m)^{1/2}} = \sqrt{\mu - \frac{\hbar^2 q^2}{8m} \pm \frac{\sqrt{\hbar^2 \omega^2 - 4\Delta^2}}{2}} \quad (8)$$

(iii) Pour $\omega_2 < \omega < \omega_3$, la résonance se produit pour $k \in [k_1, k'_1] \cup [k'_2, k_2]$ où k_1 et k_2 sont toujours donnés par (8) et k'_1 et k'_2 sont les solutions réelles positives du couple d'équations polynomiales

$$\tilde{\omega}^4 - 4\tilde{\omega}^2 P(\tilde{k}, \tilde{q}) + 4R^2(\tilde{k}, \tilde{q}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}^2 - 2P(\tilde{k}, \tilde{q}) > 0 \quad (9)$$

avec les polynômes $P(x, y) = (x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)^2 + x^2 y^2 + 1$ et $R(x, y) = 2xy(x^2 + y^2/4 - \mu/\Delta)$ et les notations

1. Avec $W_{\mathbf{kq}}^+ > 0$ pour tout \mathbf{k} et $W_{\mathbf{kq}}^- > 0$ si et seulement si $k^2 > 2m\mu/\hbar^2 - q^2/4$.

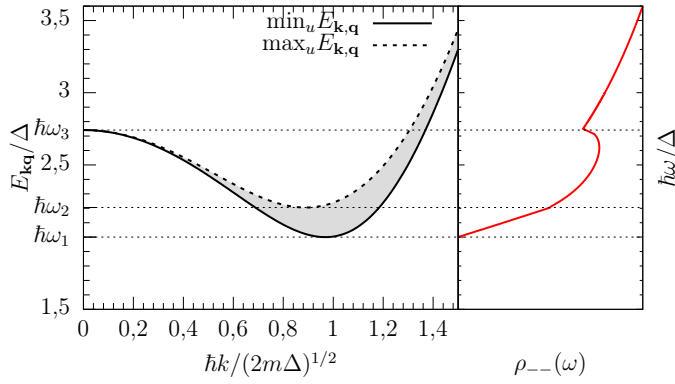


FIGURE 1: En fonction de k , l'intervalle entre $\min_u E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ atteint en $u = 0$ (trait plein à gauche) et $\max_u E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ atteint en $u = \pm 1$ (tireté à gauche) définit une bande d'énergie (zone en grisé à gauche) sur laquelle la résonance $\hbar\omega = E_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ se produit pour au moins une valeur de $u = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ appartenant à $[-1, 1]$. À ω fixé, l'intervalle d'intégration sur k dans (6) se lit horizontalement; en fonction de ω , sa structure subit 3 transitions en ω_1 , ω_2 et ω_3 (pointillés), qui se traduisent par des points anguleux dans la densité spectrale, ici l'exemple de ρ_{--} (trait plein rouge à droite). Sur cette figure, $\mu/\Delta = 1$ et $\hbar q/\sqrt{2m\Delta} = 0,5$.

$\tilde{k}^2 = \hbar^2 k^2/2m\Delta$, $\tilde{q}^2 = \hbar^2 q^2/2m\Delta$ et $\tilde{\omega} = \hbar\omega/\Delta$. (iv) Pour $\omega > \omega_3$, les solutions k_1 et k'_1 ne sont plus réelles, l'intervalle d'intégration se réduit donc à $[k'_2, k_2]$.

Une fois cette étude faite, l'extension des fonctions $\rho_{\sigma\sigma'}$ au plan complexe est immédiate, il suffit de remplacer ω par z dans les équations (8) et (9) donnant les bornes d'intégration, $\rho_{\sigma\sigma'}(z)$ étant alors donnée par une intégrale curviligne entre des bornes complexes. En appliquant la prescription de Nozières (7), on obtient ainsi un prolongement analytique de M , où les points anguleux ω_1 , ω_2 et ω_3 deviennent les points de branchement de trois lignes de coupure.

Étude numérique à q quelconque – Nous trouvons une solution $z_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} - i\hbar\Gamma_{\mathbf{q}}/2$ à l'équation (2) dans le prolongement analytique à travers l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, que nous identifions comme l'énergie du mode collectif de « Littlewood-Varma » que nous cherchons. La relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ est représentée sur la figure 2 pour différentes forces d'appariement $\mu/\Delta = 1/10, 10$ et 100 ($1/k_F a \simeq 0,5, -1,5$ et $-3,0$ dans un gaz de fermions froids de spin $1/2$, avec k_F le nombre d'onde de Fermi et a la longueur de diffusion dans l'onde s). De départ quadratique à partir de sa limite 2Δ en $q = 0$, la branche passe par un maximum de hauteur en énergie proportionnelle à Δ dans le régime de couplage faible $\Delta \ll \mu$. Elle entre ensuite dans la bande interdite $[0, 2\Delta]$ en $q = q_{\text{sup}}$. Dans le régime de couplage fort $\Delta > \mu$, le domaine $[0, q_{\text{sup}}]$ où l'énergie de la branche est supérieure à 2Δ se réduit, jusqu'à sa disparition pour $\mu/\Delta \simeq 0,8267$. Le taux d'amortissement $\Gamma_{\mathbf{q}}$ est lui une fonction strictement croissante

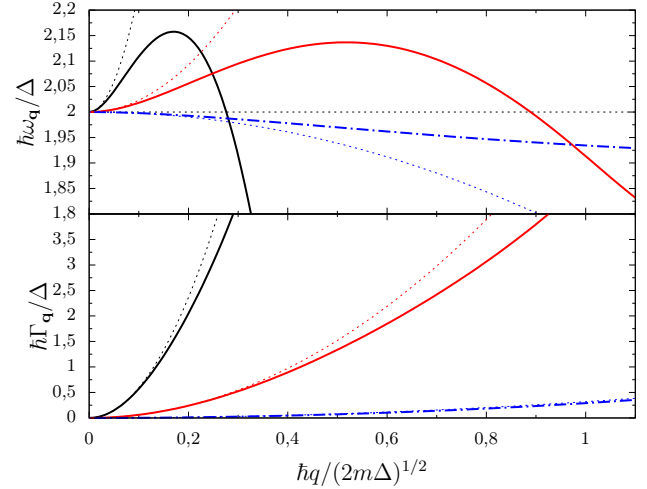


FIGURE 2: Pulsation (en haut) et taux d'amortissement (en bas) des modes collectifs de Higgs en fonction de leur nombre d'onde q pour $\mu/\Delta = 100$ ($1/k_F a \simeq -3,0$, trait plein noir), $\mu/\Delta = 10$ ($1/k_F a \simeq -1,5$, trait plein rouge) et $\mu/\Delta = 0,1$ ($1/k_F a \simeq 0,5$, tireté pointillé bleu). Les courbes pointillées montrent le comportement quadratique en q aux faibles q obtenu analytiquement des équations (12)-(16).

de q , de départ quadratique à partir de sa limite de valeur nulle en $q = 0$. Ceci est en désaccord marqué avec la prédiction communément acceptée dans la littérature d'un taux d'amortissement linéaire en q [10].

La branche disparaît finalement en $q = 2k_0$ (donc avant que la branche de Bogoliubov-Anderson ne rejoigne le continuum [3]) lorsque l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$ à travers lequel passe notre prolongement analytique se réduit à un point. Enfin nous excluons l'existence d'une branche d'énergie supérieure à $2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$ dans le régime CBE où $\mu < 0$ et où les trois singularités de $\rho_{\sigma\sigma'}$ se regroupent, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{(|\mu| + \hbar^2 q^2/2m)^2 + \Delta^2}/\hbar$.

Limite des grandes longueurs d'ondes – Dans cette limite, nous obtenons plusieurs résultats analytiques qui corroborent notre étude numérique. Nous traitons à part le cas singulier $q = 0$, où la matrice $M(z, \mathbf{q} = 0)$ est exprimable en termes des fonctions elliptiques complètes de première et troisième espèce, $K(k)$ et $\Pi(n, k)$ [26] :

$$\begin{aligned} \text{th}\zeta \tilde{M}_{++}(z, 0) &= \frac{\tilde{M}_{--}(z, 0)}{\text{th}\zeta} = -\pi(2e^t)^{1/2}[F(\zeta) - F(-\zeta)] \\ \tilde{M}_{+-}(z, 0) &= -\pi(2e^t)^{1/2}[F(\zeta) + F(-\zeta)] \end{aligned} \quad (10)$$

avec les variables définies par $\mu/\Delta = \text{sh } t$ et $z = 2\Delta \text{ch } \zeta$,

ζ contraint par $\text{Re } \zeta \geq 0$ et $-\pi/2 \leq \text{Im } \zeta \leq \pi/2$ et²

$$F(\zeta) = (\text{sh } t + \text{sh } \zeta) [\Pi(e^{t+\zeta}, ie^t) - \Pi(-e^{t-\zeta}, ie^t)] + K(ie^t) \text{ch } \zeta \quad (11)$$

L'équation (2) s'écrit alors simplement $F(\zeta)F(-\zeta) = 0$. La seule solution de cette équation, même après prolongement analytique³ de $F(\zeta)$, est $\zeta = \pm i\pi/2$ (soit $z = 0$) : c'est le point de départ de la branche phononique d'Anderson-Bogolioubov. Ainsi, le point limite $\omega = 2\Delta/\hbar$ en $q = 0$ de la branche collective du continuum n'est pas solution de (2) : $F(\zeta)$ admet une limite finie et non nulle $F(0)$ lorsque $\zeta \rightarrow 0$ avec $\text{Im } z > 0$. Pour $q = 0$, il n'y a donc pas de mode collectif de pulsation $2\Delta/\hbar$, et les oscillations observées [15–18] à cette pulsation correspondent simplement au bord du continuum de brisure de paires, comme l'avait compris les références [9, 12, 13]. Le comportement collectif se manifeste plutôt dans l'amortissement en loi de puissance des oscillations [13, 14].

Pour q petit mais non nul, et $\mu > 0$, le secteur de résonance entre $\hbar\omega_1 = 2\Delta$ et $\hbar\omega_2 = 2\Delta + \mu\hbar^2q^2/2m\Delta + O(q^4)$ sur la figure 1 a une largeur en énergie $O(q^2)$, et $O(q)$ en le nombre d'onde k autour du minimum $k_0 = \sqrt{2m\mu/\hbar^2}$ de la branche BCS. Ceci suggère de poser

$$z_{\mathbf{q}} = 2\Delta + Z \frac{\hbar^2 q^2}{4m^*} + O(q^3) \quad \text{et} \quad k = k_0 + Kq \quad (12)$$

avec $m^* = m\Delta/2\mu$ la masse effective de la branche BCS au voisinage de son minimum. On concentre ainsi l'attention sur le domaine des vecteurs d'onde où le dénominateur dans (3,4) est d'ordre q^2 :

$$z - E_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = z - 2\Delta - \frac{\hbar^2 q^2}{m_*} (K^2 + u^2/4) + O(q^3) \quad (13)$$

En utilisant alors les développements des amplitudes du numérateur $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ \sim 1$ et $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- \sim \hbar^2 k_0 q K/m\Delta$, puis en effectuant l'intégrale sur la variable angulaire u avant celle sur K (non sans avoir vérifié que le reparamétrage (12) donne lieu lorsque $q \rightarrow 0$ à une intégrale absolument convergente sur K) on obtient sans mal les expressions

2. À l'aide des densités spectrales $\rho_{\sigma\sigma'}(\omega)$, on exprime $M_{\sigma\sigma'}(z, 0)$ sous forme d'une intégrale sur ω , en distinguant pour $\mu > 0$ les contributions de $k < k_0$ et $k > k_0$. Le changement de variable $\hbar\omega = \Delta(x^2 + 1/x^2)$, $0 < x < 1$, fait alors disparaître la racine carrée $(\hbar^2\omega^2 - 4\Delta^2)^{1/2} = \Delta(1/x^2 - x^2)$ et conduit à l'intégrale $\int dx R(x)/\sqrt{P(x)}$, où $P(x)$ est un polynôme de degré 4 et $R(x)$ une fraction rationnelle, ramenable à une combinaison linéaire d'intégrales elliptiques (cf. §8.110 de [26]).

3. La ligne de coupure $[2\Delta, +\infty[$ (respectivement $[2\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}, +\infty[$) en z donne une ligne de coupure en ζ $[0, +\infty[$ pour $\mu > 0$ (respectivement $[-t, +\infty[$ pour $\mu < 0$).

analytiques pour $\text{Im } z > 0$:

$$\tilde{M}_{++}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 k_\Delta}{q} \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} + O(q) \quad (14)$$

$$\tilde{M}_{--}(z, \mathbf{q}) = -\frac{i\pi^2 \mu q}{2\Delta k_\Delta} \left[\sqrt{Z-1} + Z \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] + O(q^3) \quad (15)$$

où nous introduisons $k_\Delta = \sqrt{2m\Delta/\hbar^2}$ et adimensionnons les intégrales $\tilde{M}_{\sigma\sigma'} = M_{\sigma\sigma'}\Delta/k_\Delta^3$. Puisque la divergence de M_{++} d'ordre $1/q$ est compensée par l'annulation de M_{--} linéaire en q , il suffit de prendre la limite finie et non nulle (10) de M_{+-} en $q = 0$ et $\hbar\omega = 2\Delta$ ($\zeta = 0$). Il n'y a plus qu'à insérer les expressions (10,14,15) dans l'équation de la RPA (2) et à prolonger analytiquement le produit $M_{++}M_{--}$ à travers sa ligne de coupure $[0, 1]$ en Z (correspondant au segment $[\hbar\omega_1, \hbar\omega_2]$ en z) grâce aux substitutions $\text{asin} 1/\sqrt{Z} \rightarrow \pi - \text{asin} 1/\sqrt{Z}$ et $\sqrt{Z-1} \rightarrow -\sqrt{Z-1}$ pour obtenir l'équation explicite mais transcendante sur Z :

$$\left[\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right] \left[Z \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{Z}} \right) - \sqrt{Z-1} \right] + \frac{2}{\pi^4 \mu} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^3 M_{+-}^2(2\Delta, 0) = 0 \quad (16)$$

Le prolongement vaut pour tout le demi-plan inférieur, donc y compris pour $\text{Re } z < 2\Delta$ ($\text{Re } Z < 0$). L'unique solution de l'équation (16) reproduit fidèlement le coefficient de q^2 dans la figure 2 ; elle est représentée sur la figure 3 en fonction de μ/Δ . La partie réelle change de signe en $\mu/\Delta \simeq 0,8267$, ce qui confirme l'existence d'une branche d'énergie inférieure à 2Δ dans le régime de couplage fort. Il ne faut pas surinterpréter l'existence de solutions de pulsation inférieure à 2Δ : elles demeurent séparées du segment $[0, 2\Delta]$ de l'axe réel par une ligne de coupure, si bien que leur effet ne se fait sentir au voisinage de l'axe réel qu'aux énergies supérieures à 2Δ .

Dans la limite de couplage faible $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$, M_{+-} tend vers zéro à cause de la symétrie particule-trou $k \leftrightarrow k_0 - k$, si bien que l'équation de la RPA se réduit pour $q \neq 0$ à $M_{--} = 0$, et que l'équation (16) sur Z se réduit à la partie dépendante de Z de la première ligne. Le mode collectif de Littlewood-Varma correspond bien à un pur mode d'amplitude, l'annulation de M_{++} donnant le mode de phase phononique dans cette limite, comme il est dit dans [10]. Cependant, nous obtenons une relation de dispersion fort différente

$$z_{\mathbf{q}} \underset{\mu/\Delta \rightarrow +\infty}{\overset{q \rightarrow 0}{\simeq}} 2\Delta + (0,2369 - 0,2956i) \frac{\hbar^2 q^2}{4m^* \Delta} \quad (17)$$

où même la partie réelle de Z diffère de celle $2/3$ de [10].

Notre calcul montre les limites de l'analogie habituelle avec les modes de Higgs en théorie des champs : bien qu'il s'agisse aussi d'un mode d'amplitude dans la limite de couplage faible, et qu'il possède une bande interdite, le mode collectif, ici plongé dans un continuum,

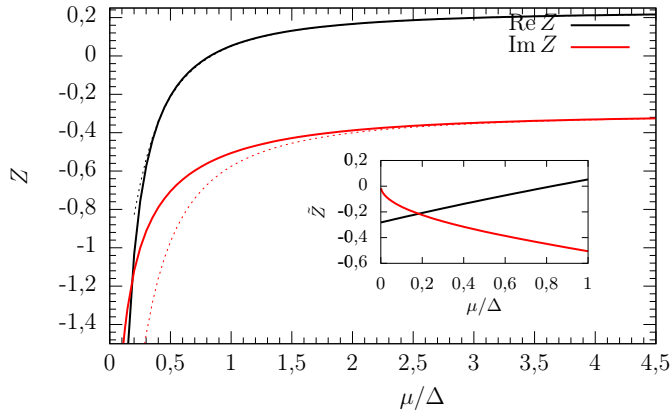


FIGURE 3: La partie réelle (trait plein noir) et imaginaire (trait plein rouge) du coefficient adimensionné Z de q^2 dans l'énergie $z_{\mathbf{q}}$ du mode de « Littlewood-Varma » sont représentées en fonction de μ/Δ . Les courbes pointillées donnent le développement asymptotique dans la limite de couplage faible $\mu/\Delta \rightarrow +\infty$: $Z = Z_0 - \frac{2Z_0^2}{Z_0-1} \left(\frac{\Delta}{\pi\mu}\right)^2 \ln^2 \frac{\Delta}{8\mu e} + \dots$ avec $Z_0 = 0,2369 - 0,2956i$. L'encart montre le coefficient redimensionné $\tilde{Z} = Z\mu/\Delta = Zm/2m^*$ qui admet la limite finie réelle $\tilde{Z}_\infty = -16K^2(i)/\pi^4 \simeq -0,2823$ dans la limite de couplage fort $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, sa partie imaginaire tendant vers zéro comme $-12K(i)(\mu/\Delta)^{1/2}/\pi^3$.

ne s'obtient qu'après traitement non perturbatif du couplage aux degrés de liberté fermioniques ; aucune chance donc de l'obtenir à partir d'une action effective de basse énergie comme suggéré parfois [7, 27].

Observabilité dans les fonctions de réponse – La branche collective que nous prédisons s'observe dans les fonctions de réponse du système. Nous donnons sur la figure 4 l'exemple de la fonction de réponse du paramètre d'ordre $\text{Abs}[N/\det M](\omega + i0^+, \mathbf{q})$ avec $N = (M_{++} + M_{--})/2 + M_{+-}$, obtenue à partir des fonctions de réponse d'amplitude et de phase par le changement de variable $\delta\Delta = \delta\lambda + \Delta i\delta\theta$. Aux faibles q (lorsque l'amortissement du mode est faible) la branche obtenue dans le prolongement analytique prédit remarquablement bien la position d'un pic élargi dans la fonction de réponse. Nous notons d'ailleurs avec un vif intérêt que la référence [6] observe un tel pic dans ses mesures de la fonction de réponse densité-densité, qui pourrait bien correspondre à la branche collective de « Higgs », en particulier si la dépendance en q^2 de la position du pic aux faibles q se confirmait.

Conclusion – Nous avons établi sur des bases théoriques solides l'existence d'une branche collective dans le continuum de brisure de paires d'un supraconducteur BCS ou d'un gaz de fermions superfluide, et nous avons caractérisé intégralement sa relation de dispersion et son taux d'amortissement dans l'approximation RPA. Nous apportons ainsi une réponse claire et rigoureuse à un

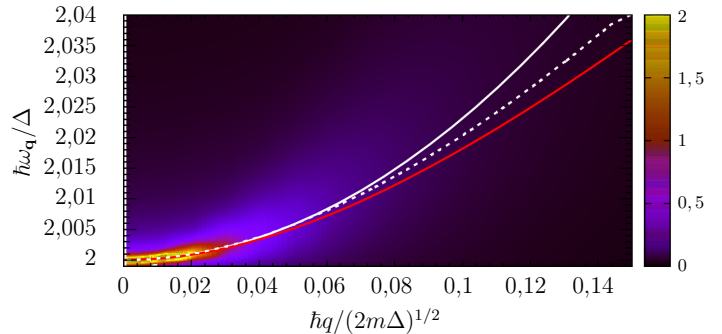


FIGURE 4: L'intensité de la fonction de réponse du champ de paire est représentée en couleurs et en unités arbitraires en fonction de q et ω dans le régime BCS ($\mu/\Delta = 10$). Le sommet du pic (tireté blanc) de la fonction est bien prédit aux faibles q par la branche collective du prolongement analytique (trait plein rouge et trait plein blanc pour son approximation quadratique (12)).

vieux problème de matière condensée. Notre branche apparaît nettement dans les fonctions de réponse du système et peut donc être mesurée dans un gaz d'atomes froids par spectroscopie de Bragg.

-
- [1] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. Phys. Rev., 112:1900–1916, 1958.
 - [2] M. MARINI, F. PISTOLESI et G.C. STRINATI : Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions. European Physical Journal B, 1:151–159, 1998.
 - [3] R. COMBESCOT, M. YU. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. Phys. Rev. A, 74:042717, octobre 2006.
 - [4] K. KADOWAKI, I. KAKEYA, M. B. GAIFULLIN, T. Mochiku, S. TAKAHASHI, T. KOYAMA et M. TACHIKI : Longitudinal Josephson-plasma excitation in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$: Direct observation of the Nambu-Goldstone mode in a superconductor. Phys. Rev. B, 56:5617–5621, septembre 1997.
 - [5] J. JOSEPH, B. CLANCY, L. LUO, J. KINAST, A. TURLAPOV et J. E. THOMAS : Measurement of Sound Velocity in a Fermi Gas near a Feshbach Resonance. Phys. Rev. Lett., 98:170401, avril 2007.
 - [6] Sascha HOINKA, Paul DYKE, Marcus G. LINGHAM, Jami J. KINNUNEN, Georg M. BRUUN et Chris J. VALE : Goldstone mode and pair-breaking excitations in atomic Fermi superfluids. Nature Physics, 13:943–946, juin 2017.
 - [7] David PEKKER et C.M. VARMA : Amplitude/Higgs Modes in Condensed Matter Physics. Annual Review of Condensed Matter Physics, 6(1):269–297, 2015.
 - [8] Albert SCHMID : The approach to equilibrium in a pure superconductor. The relaxation of the Cooper pair density. Physik der kondensierten Materie, 8(2):129–140, no-

- vembre 1968.
- [9] I. O. KULIK, Ora ENTIN-WOHLMAN et R. ORBACH : Pair susceptibility and mode propagation in superconductors : A microscopic approach. Journal of Low Temperature Physics, 43(5):591–620, Jun 1981.
- [10] P. B. LITTLEWOOD et C. M. VARMA : Amplitude collective modes in superconductors and their coupling to charge-density waves. Phys. Rev. B, 26:4883–4893, novembre 1982.
- [11] T. CEA, C. CASTELLANI et L. BENFATTO : Nonlinear optical effects and third-harmonic generation in superconductors : Cooper pairs versus Higgs mode contribution. Phys. Rev. B, 93:180507, mai 2016.
- [12] R. G. SCOTT, F. DALFOVO, L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI : Rapid ramps across the BEC-BCS crossover : A route to measuring the superfluid gap. Phys. Rev. A, 86:053604, novembre 2012.
- [13] A.F. VOLKOV et Ch. M. KOGAN : Collisionless relaxation of the energy gap in superconductors. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 65:2038, 1973.
- [14] V. GURARIE : Nonequilibrium Dynamics of Weakly and Strongly Paired Superconductors. Phys. Rev. Lett., 103:075301, août 2009.
- [15] Ryusuke MATSUNAGA, Yuki I. HAMADA, Kazumasa MAKISE, Yoshinori UZAWA, Hirotaika TERAI, Zhen WANG et Ryo SHIMANO : Higgs Amplitude Mode in the BCS Superconductors $Nb_{1-x}Ti_xN$ Induced by Terahertz Pulse Excitation. Phys. Rev. Lett., 111:057002, juillet 2013.
- [16] M.-A. MÉASSON, Y. GALLAIS, M. CAZAYOUS, B. CLAIR, P. RODIÈRE, L. CARIO et A. SACUTO : Amplitude Higgs mode in the $2H - NbSe_2$ superconductor. Phys. Rev. B, 89:060503, février 2014.
- [17] A. F. KEMPER, M. A. SENTEF, B. MORITZ, J. K. FERRICKS et T. P. DEVEREAUX : Direct observation of Higgs mode oscillations in the pump-probe photoemission spectra of electron-phonon mediated superconductors. Phys. Rev. B, 92:224517, décembre 2015.
- [18] K. GAO, C. KOLLATH et M. KÖHL : Observation of the Higgs mode in strongly interacting Fermi gases. À paraître dans *Nature Physics*.
- [19] Roberto B. DIENER, Rajdeep SENSARMA et Mohit Randeria : Quantum fluctuations in the superfluid state of the BCS-BEC crossover. Phys. Rev. A, 77:023626, février 2008.
- [20] Hadrien KURKJIAN et Jacques TEMPERE : Absorption and emission of a collective excitation by a fermionic quasiparticle in a Fermi superfluid. New Journal of Physics, 19(11):113045, 2017.
- [21] H. KURKJIAN : Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris, 2016.
- [22] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas. Annalen der Physik, 529(9):1600352, 2017.
- [23] C. COHEN-TANNOUJDI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : Processus d'interaction entre photons et atomes. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [24] Philippe NOZIÈRES : Le problème à N corps : propriétés générales des gaz de fermions. Dunod, Paris, 1963.
- [25] Francesco MATERA et Matthias F. WAGNER : Low-energy modes of spin-imbalanced Fermi gases in BCS phase. The European Physical Journal D, 71(11):293, novembre 2017.
- [26] I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK : Tables of Integrals, Series, and Products. Academic Press, San Diego, 1994.
- [27] Boyang LIU, Hui ZHAI et Shizhong ZHANG : Evolution of the Higgs mode in a fermion superfluid with tunable interactions. Phys. Rev. A, 93:033641, mars 2016.