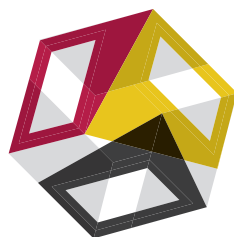




Handboek voor leraren

**Het leren en onderwijzen van wiskundig
redeneren verbeteren door middel
van Lesson Study**



LESSAM

Handboek voor leraren

Het leren en onderwijzen van wiskundig redeneren verbeteren door middel van Lesson Study

van het project

Lesson Study als middel om de prestaties
in wiskunde te verbeteren (LESSAM)

onder het

Erasmus+ Programme Key Action 2 Strategic
Partnerships for school education





University
of Cyprus



University
of Antwerp



EINDHOVEN
UNIVERSITY OF
TECHNOLOGY



HELLENIC REPUBLIC

National and Kapodistrian
University of Athens

— EST. 1837 —



CYPRUS PEDAGOGICAL
INSTITUTE

Inhoud

Auteurs	01
DEEL 1: Redeneren in de wiskundendidactiek	02
1. Inleiding	03
2. Een motivering voor wiskundig redeneren (in Lesson Study)	04
3. Manieren van wiskundig redeneren	07
4. Het ontwerpen, uitvoeren en evalueren van lessen die wiskundig redeneren bevorderen	10
5. Afsluitende opmerkingen	26
Deel 2: Research Lesson Study	27
1. Inleiding	28
2. Research Lesson Study opstarten	34
3. Een onderzoeksdoel bepalen en caseleerlingen selecteren	37
4. Planning van de eerste onderzoeksles	39
5. De eerste onderzoeksles geven	45
6. Caseleerlingen interviewen en de korte vragenlijst/exit card afnemen	46
7. Nabespreking van de onderzoeksles	47
8. De algemene evaluatie	51
9. De resultaten van de Research Lesson Study delen met leerlingen en andere professionals	51
Lege formulieren	53
Deel 3: inspirerende weblinks	67
Referenties	70

Pictogrammen



Lerarentaak



Wiskunde opdracht



Voorbeeld

Auteurs

- **Barbier, Katelijne**
Department of Training and Educational Sciences, University of Antwerp, Belgium
- **Donche, Vincent**
Department of Training and Educational Sciences, University of Antwerp, Belgium
- **Struyf, Elke**
Department of Training and Educational Sciences and Antwerp School of Education, University of Antwerp, Belgium
- **Vandervieren, Ellen**
Department of Training and Educational Sciences and Antwerp School of Education, University of Antwerp, Belgium
- **Pepin, Birgit**
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Schüler-Meyer, Alexander**
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Vermunt, Jan**
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands
- **Dimitriadis, Katerina**
17th Gymnasium of Peristeri, Athens, Greece
- **Potari, Despina**
Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Greece
- **Psycharis, Giorgos**
Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Greece
- **Triantafillou, Chrissavgi**
Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Greece

- **Stouraitis, Konstantinos**
Institute of Educational Policy, Greece
- **Paparistodemou, Efi**
Cyprus Pedagogical Institute, Cyprus
- **Dudley, Pete**
Faculty of Education, University of Cambridge, UK

In samenwerking met

- **Kyriakides, Leonidas**
Department of Education, University of Cyprus, Cyprus
- **Vrikki, Maria**
Department of Education, University of Cyprus, Cyprus
- **Antoniou, Panayiotis**
Department of Education, University of Cyprus, Cyprus
- **Ioannou, Ioannis**
Cyprus Ministry of Education, Sport and Youth
- **Zachariades, Theodossios**
Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Greece
- **Metaxas, Nikolaos**
Department of Mathematics, National and Kapodistrian University of Athens, Greece
- **Petropoulou, Georgia**
Institute of Educational Policy, Greece
- **van der Wal, Nathalie**
Eindhoven University of Technology and Eindhoven School of Education, The Netherlands

Redeneren in de wiskundedidactiek

01

1. Inleiding

In dit eerste deel van het handboek introduceren we “redeneren” in de context van dit Lesson Study-project. De eerste sectie geeft een motivering voor het bestuderen van redeneren in Lesson Study; vervolgens bespreken we de

acht soorten redeneren die we in de Lesson Study onderzoeken. Tot slot komen kwesties aan bod die te maken hebben met het ontwerpen, uitvoeren en evalueren van lessen die wiskundig redeneren bevorderen.



2. Een motivering voor wiskundig redeneren (in Lesson Study)

Er zijn verschillende manieren om “redeneren” in de context van schoolwiskunde te definiëren; we geven er enkele zodat je kunt nagaan welke definitie het dichtst bij jouw opvattingen aansluit.

Wiskundig redeneren is het trekken van logische conclusies op basis van bewijs of verklaarde veronderstellingen.

National Council of Teachers of Mathematics (1900, p. 1)

“

“

Wiskundig redeneren stelt kinderen in staat om gebruik te maken van al hun andere wiskundige vaardigheden en dus kan redeneren worden gezien als de ‘lijm’ die wiskunde zinvol maakt.

The NRICH Primary Team (2014, p. 1)

Wiskundig redeneren is het proces van het manipuleren en analyseren van objecten, representaties, diagrammen, symbolen of verklaringen om conclusies te trekken op basis van bewijs of veronderstellingen

Battista (2017, p.1)

“

Wiskundig redeneren is het proces van communicatie met anderen of met jezelf dat het mogelijk maakt wiskundige uitingen af te leiden uit andere wiskundige uitingen.

Jeannotte & Kieran (2017, p. 9)

“

Wiskundig redeneren verwijst naar de gedachtegang die wordt gevolgd om [...] tot conclusies te komen bij het oplossen van taken. Een redenering is niet noodzakelijkerwijs gebaseerd op formele logica en is dus niet beperkt tot bewijzen; het kan zelfs onjuist zijn, zolang er (voor de redenaar) maar zinnige redenen zijn die dit ondersteunen.

Bergqvist & Lithner (2012, p. 253)

“



Lerarentaak

Vergelijk deze definities van wiskundig redeneren.

Vergelijk deze definities van wiskundig redeneren. Welke elementen van wiskundig redeneren worden door alle citaten gedeeld?

Wat zijn elementen die uniek zijn voor elk citaat? Bedenk twee voorbeelden van wiskundig redeneren uit je recente lespraktijk.

Karakteriseer ze aan de hand van een van de bovenstaande definities van wiskundig redeneren.

Wiskundig redeneren wordt gezien als essentieel om de kloof tussen basisvaardigheden en hogere-orde-denken te overbruggen. Uit onderzoek is gebleken dat **leerlingen die al vroeg leren redeneren uiteindelijk zelfverzekerder en zelfstandiger leren; zij begrijpen beter hoe een concept in uiteenlopende situaties kan worden**

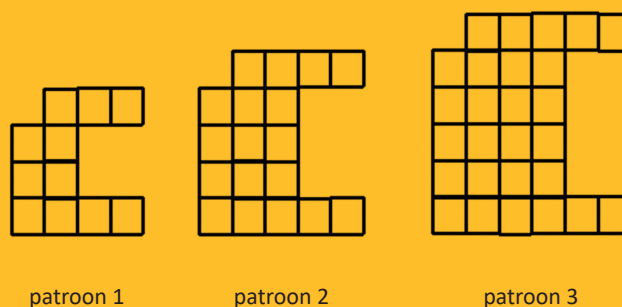
toegepast en zijn bereid risico's te nemen om te zien wat werkt en wat niet.

De volgende opdracht¹ biedt alle leerlingen de mogelijkheid om te redeneren, op verschillende niveaus:



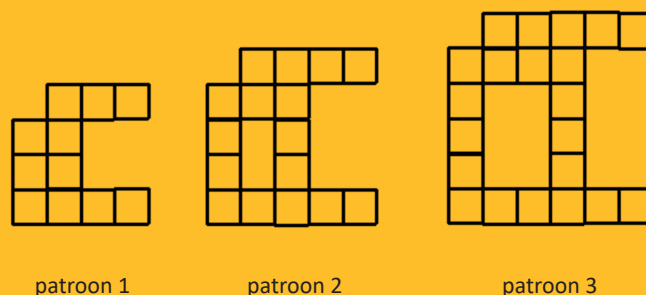
Wiskunde opdracht 1: kleine vierkantjes

Figuur 1



1. Hoe zou patroon 4 eruit zien? Hoe zou patroon 100 eruit zien? En patroon 957?
2. Hoeveel kleine vierkantjes zou patroon n bevatten?
3. Hoe ben je aan dit getal gekomen?
4. (Gevorderd) Kijk naar Figuur 2 (zie hieronder) en herhaal de vragen 1-3. Wat stel je vast, in tegenstelling tot de oorspronkelijke Figuur 1? Waarom is dat het geval?
5. Wat is het grootste mogelijke aantal kleine vierkantjes dat je uit het oorspronkelijke patroon in Figuur 1 kunt weghalen, zodanig dat het totale aantal kleine vierkantjes nog steeds kwadratisch groeit?

Figuur 2



¹Inspired by Boaler (2016, p.73)



Lerarentaak

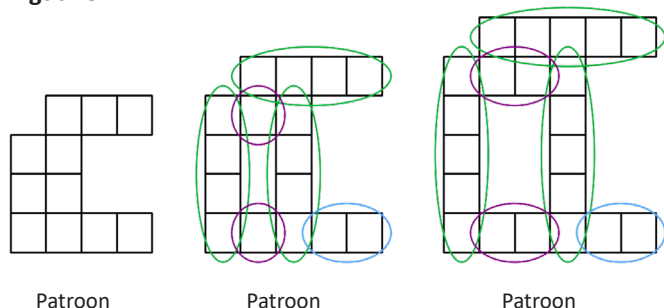
1. Reflecteer op je eigen redeneerproces (bijvoorbeeld door de volgende vragen te beantwoorden):
 - Hoe heb je de structuur in het patroon gevonden?
 - Heb je de getallenvoorbeelden gebruikt, en zo ja, hoe?
 - Hoe heb je deze structuur vertaald in een algebraïsche uitdrukking?
 - Hebben je collega('s) dezelfde algebraïsche uitdrukkingen gevonden? Zo ja, hoe? Zo nee, wat heeft je collega anders gedaan?
 - Zoek zoveel mogelijk symbolische representaties als je kunt.
2. Beschrijf welke redeneringen de leerlingen zullen volgen wanneer ze aan deze opdracht werken. Hoe zullen de oplossingen van de leerlingen eruit zien?
3. Ga na welke soorten representaties de leerlingen zouden kunnen gebruiken.
4. Wat voor soort communicatie wordt van de leerlingen verwacht?
5. Wat voor soort wiskundig denken is vereist om de opdracht op te lossen?

Het formuleren van vermoedens en veralgemeningen zijn essentiële onderdelen van het (aan)leren van wiskundig redeneren. Redeneren omvat rechtvaardigen; dat wil zeggen “vermoedens formuleren, onderzoeken en evalueren, en wiskundige argumenten ontwikkelen om jezelf en anderen ervan te overtuigen dat het vermoeden waar is”². Aldus **stelt redeneren leerlingen in staat om verder te gaan dan routineprocedures en een waardering te ontwikkelen voor de onderling verbonden, logische en betekenisvolle aspecten van wiskunde**³.

Rechtvaardigen is meer dan uitleggen “wat” en omvat ook het “waarom” om een bewering te verifiëren⁴. Een wiskundige rechtvaardiging is een logisch argument gebaseerd op aanvaarde procedures, eigenschappen, concepten en wiskundige ideeën⁵. Naarmate de redeneervaardigheid van leerlingen toeneemt, zijn ze in staat om een wiskundig en degelijk logisch argument aan te dragen om een bewering te ondersteunen⁶. Ondanks het belang ervan, krijgen leerlingen echter zelden de kans om deel te nemen aan wiskundige redeneeractiviteiten⁷.

In het voorbeeld hierboven zou de redenering van je leerlingen er als volgt uit kunnen zien:

Figuur 3⁸



Om het patroon in de reeks te herkennen, moeten de leerlingen:

- Analyseren en structureren: identificeer elementen die veranderen van het ene patroon naar het andere (groen, paars) en elementen die hetzelfde blijven (blauw).
- Een vermoeden over de aard van de verandering formuleren: de groene elementen groeien op dezelfde manier, dus zijn er drie vormen die elk met 1 toenemen van de ene stap naar de volgende. Evenzo zijn er twee paarse elementen die met 1 toenemen. Het blauwe element verandert niet van het ene patroon naar het andere.
- De geïdentificeerde gemeenschappelijkheden veralgemenen: een algemeen patroon kan dus worden voorgesteld als $3 \cdot (n+2) + 2 \cdot (n-1) + 2$.
- Het vermoeden testen: beschrijft de uitdrukking het eerste of nul-patroon op de juiste manier? Hoe zit het met het vijfde patroon?

In het bovenstaande voorbeeld houden de leerlingen zich vooral bezig met analyseren en veralgemenen. Door te veralgemenen worden overeenkomsten tussen gevallen vastgesteld, die verder gaan dan de oorspronkelijke casus⁹.

Gezien het belang van het stimuleren van redeneren zouden wij je willen aanmoedigen om in je lessen aandacht te besteden aan redeneren. Daarom geven we in het volgende hoofdstuk aan welke manieren van redeneren het meest relevant zijn in wiskunde op school. Nadien gaan we in op het (aan) leren van redeneren.

²Goos, Vale, & Stillman (2017, σελ. 37)

³Mata-Pereira & da Ponte (2017)

⁴Sowder & Harel (1998)

⁵Mata-Pereira & da Ponte (2017)

⁶Jeannotte & Kieran (2017)

⁷Prediger, et al. (2018)

⁸Adapted from Boaler (2016)

⁹Blanton & Kaput (2005); Küchemann (2010)

3. Manieren van wiskundig redeneren

Er zijn reeds verschillende pogingen gedaan om manieren van wiskundig redeneren te categoriseren om zo de aard en de variaties ervan te begrijpen. In het PISA 2021-kader voor wiskunde¹⁰ is wiskundig redeneren een kernaspect van wiskundige geletterdheid. Correct redeneren op basis van veronderstellingen kan leiden tot resultaten waarvan volledig kan worden vertrouwd dat ze waar zijn in een breed scala aan levensechte contexten. Het PISA-kader onderscheidt zes kernbegrippen die structuur en steun bieden aan wiskundig redeneren. Deze kernbegrippen omvatten:

- Het begrijpen van hoeveelheden, getallenstelsels en hun algebraïsche eigenschappen;
- Het waarderen van de kracht van abstractie en symbolische representatie;
- Het zien van wiskundige structuren en hun regelmatigheden;
- Het herkennen van functionele relaties tussen hoeveelheden;
- Het gebruik van wiskundige modellen als een lens op de echte wereld (bv. modellen die ontstaan in de natuurwetenschappen, de biowetenschappen, de sociale en economische wetenschappen en de gedragswetenschappen) en
- Het begrip van variatie als het hart van de statistiek.

In de huidige discussie over wiskundige competenties is wiskundig redeneren geïdentificeerd als een van de acht fundamentele wiskundige competenties¹¹. Deze competentie omvat zowel het constructief verantwoorden van wiskundige beweringen als het

kritisch analyseren en beoordelen van bestaande of voorgestelde bewijspogingen. De competentie behandelt een breed spectrum aan bewijsvormen, variërend van het beoordelen of geven van voorbeelden (of tegenvoorbeelden) over heuristieken en lokale deductie tot rigoureuze bewijs op basis van logische deductie uit bepaalde axioma's.

Wiskundig redeneren wordt ook in verband gebracht met “wiskundige veralgemeningen maken” en “ondersteuning zoeken voor wiskundige beweringen”¹². De tweede activiteit is in de onderzoeksliteratuur uitvoeriger besproken en in verband gebracht met bepaalde manieren van redeneren. Wiskunde opdracht 1 hierboven illustreerde hoe redeneren in generalisatiecontexten eruit kan zien.

Gelet op bovenstaande discussies en bevindingen ontwikkelden wij in de context van LESSAM een kader met **acht kernaspecten van wiskundig redeneren**. Tabel 1 geeft een overzicht van deze acht kernaspecten, telkens aangevuld met een korte beschrijving en een voorbeeld van een bijhorende opdracht. Deze categorisering heeft uiteraard beperkingen, maar we denken dat ze leraren ook een hulpmiddel biedt om a) opvallende kenmerken van wiskundig redeneren bij leerlingen te herkennen, b) het ontwerp van taken te overwegen die verschillende aspecten van wiskundig redeneren bevorderen, en c) na te denken over manieren om wiskundig redeneren van leerlingen te verbeteren.



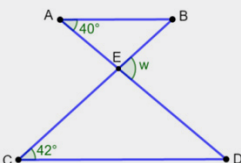
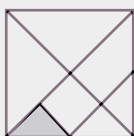
¹⁰OECD (2022)

¹¹Niss & Højgaard (2019)

¹²As they are analysed in the framework of Stylianides (2009)

Tabel 1

Kernaspecten van wiskundig redeneren (gebruikt in het LESSAM-project)

 Kernaspecten van wiskundig redeneren	 Beschrijving	 Voorbeeld van een relevante opdracht														
Veralgemeenen vanuit specifieke gevallen (inductief redeneren)	bv. de algemene term in een patroon vinden	Vul in de onderstaande tabel de cellen onder 100 en n in: <table border="1" data-bbox="1040 739 1444 844"><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>...</td><td>100</td><td>n</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr></table>	2	2	3	4	...	100	n	3	6	9	12	...	...	...
2	2	3	4	...	100	n										
3	6	9	12	...	...	...										
Het evalueren van wiskundige beweringen	bv. weerleggen door tegenvoorbeelden	George zegt dat een rechthoekige driehoek niet gelijkbenig kan zijn. Ben je het met hem eens of niet? Leg uit waarom.														
Conclusies ontwikkelen via deductief redeneren	bv. wiskundige verklaringen gebruiken om tot een oplossing te komen	In de volgende figuur geldt dat $AB \parallel CD$. Bereken de hoek w. 														
Redeneren naar analogie, d.w.z. overdracht van structurele informatie van het ene systeem naar het andere	bv. de structuur van manipulaties overbrengen naar de abstracte context	In een koninkrijk zijn er zwarte en rode ridders. Telkens als een rode ridder een zwarte ontmoet (of omgekeerd) worden ze beide vernietigd. Kun je de volgende rekenkundige berekening koppelen aan het bovenstaand verhaal: $-1 + 1 = 0$														
Redeneren met beelden	bv. ontleding van geometrische vormen in het bewijsproces.	Hoeveel keer past de gekleurde driehoek in het grote vierkant? Leg uit. 														
De relevantie van een wiskundig model in een realistische situatie nagaan	Overwegen of een wiskundig model geschikt is om het probleem op te lossen	Hoeveel hete lucht is er nodig om een ballon te vullen? 														



Kernaspecten van wiskundig redeneren



Beschrijving

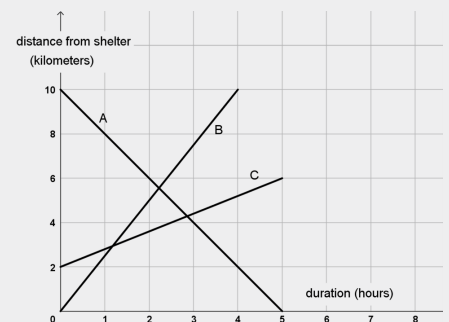


Voorbeeld van een relevante opdracht

Verbanden leggen tussen verschillende representaties

Visuele, symbolische, verbale, contextuele en fysieke representaties met elkaar verbinden

Maria vertrekt 's morgens vanuit het basiskamp naar een schuilhut op de Olympusberg, een afstand van 10 kilometer. Katrien begint op hetzelfde moment aan haar afdaling van de schuilhut naar het basiskamp. Welke lijn (tussen A, B, C) en welke vergelijking (1, 2, 3) stelt de afstand van Maria tot de schuilhut voor en welke de afstand van Katrien tot de schuilhut?

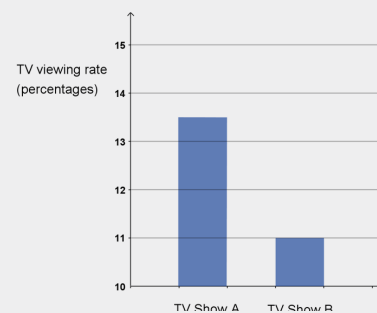


1. $y = 2.5x$
2. $y = 0.8x + 2$
3. $y = -2x + 10$

Toevalafhankelijke situaties begrijpen en modelleren

bv. beweringen en informatie verstrekt door de media evalueren

Aan de hand van onderstaand diagram beweert meneer O. dat TV-show A bijna drie keer zo populair is als TV-show B. Denk je dat hij gelijk heeft? Waarom?



4. Het ontwerpen, uitvoeren en evalueren van lessen die wiskundig redeneren bevorderen

Om lessen te ontwerpen die wiskundig redeneren bevorderen, moet aan bepaalde voorwaarden voldaan zijn. In dit hoofdstuk bespreken we een aantal onderling samenhangende thema's die verband houden met dergelijke voorwaarden: (a) redeneertaken uitvoeren en (doordachte) ondersteuning; (b) (strategisch) ondervragen; (c) belangrijke klasgebeurtenissen opmerken; en (d) redeneeracties van leerlingen beoordelen.

4.1 Redeneertaken uitvoeren en doordachte ondersteuning



Mevrouw Chiotis wil de stelling van Pythagoras introduceren bij haar leerlingen. Om aan te sluiten bij de voorkennis van leerlingen en hen meteen actief bij de les te betrekken, vraagt ze of ze wel eens van Pythagoras hebben gehoord. Sommige leerlingen hebben het hoofdstuk over Pythagoras in hun leerboek geopend. Ze steken hun hand op om de vraag van de leraar te beantwoorden. Een leerling zegt "iets met rechthoekige driehoeken", een andere leerling antwoordt " $a^2 + b^2 = c^2$ ". Beter zou geweest zijn wanneer de leraar de voorkennis activeert en de leerlingen betreft bij de les via wiskundig redeneren. Welke redeneertaken zouden hier gepast zijn?

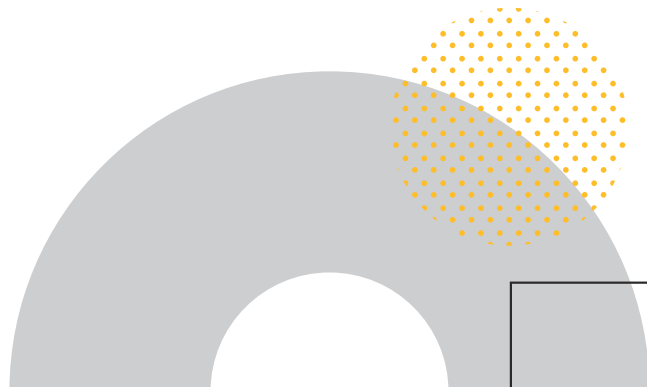
Merk op dat het soort taken dat leerlingen moeten uitvoeren, de basis vormt voor het onderwijs dat wordt gecreëerd. Met andere woorden, verschillende soorten taken leiden tot verschillende 'organisaties' van het onderwijs. In het algemeen wordt aangenomen dat onderwijs dat leerlingen de kans biedt om na te denken, te communiceren en te redeneren, gebaseerd is op opdrachten die authentiek zijn voor leerlingen.

Door opdrachten te kiezen die gericht zijn op redeneren in plaats van op het zoeken naar het juiste antwoord (zie Tabel 2), geven leraren leerlingen de mogelijkheid om wiskundige beweringen te onderzoeken en met beredeneerde oplossingen te komen. Goede redeneertaken hebben drie kenmerken¹³: (1) ze vertrekken van een authentiek probleem dat leerlingen aanspreekt; (2) ze sluiten aan bij de kennis en vaardigheden van leerlingen; en (3) ze zetten leerlingen aan het denken.

Bij de introductie van Pythagoras kunnen we leerlingen actief betrekken en wiskundig redeneren stimuleren door hen de oppervlaktes van vierkanten aan de zijden van een driehoek te laten onderzoeken, met een hulpmiddel zoals GeoGebra. De leraar kan de leerlingen vragen: "Wat observeer je? Formuleer een algemene regel.", "Ga na of je algemeen geformuleerde regel voor alle driehoeken geldt." en "Wat als de driehoek niet rechthoekig is?"



Michalis en Nicholas zijn twee toegewijde wiskundeleraren uit Cyprus die in 2022-2023 deelnamen aan het LESSAM project. Ze gaven les in het tweede jaar secundair (voortgezet) onderwijs (leerlingen van 13-14 jaar). Ze planden samen een onderzoeksles en besloten zich te concentreren op leerlingen die doorgaans verschillende niveaus van betrokkenheid (engagement) bij de les hebben. Het doel van hun onderzoeksles was dat de leerlingen de snijpunten van de assen konden vinden en konden vaststellen of een punt tot een lijn behoort of niet. Michalis gaf de les eerst in zijn klas door specifieke voorbeelden van verschillende casussen op Geogebra te demonstreren en vervolgens de leerlingen aan voorbeelden te laten werken en ze te bespreken. Aan het einde schreef hij uiteindelijk op het whiteboard alle verschillende casussen en voorbeelden die eerder in de les waren gepresenteerd. Na afloop van de les hadden Michalis, Nicholas en een derde persoon met wiskunde expertise een reflectiegesprek. Er werd gediscussieerd dat sommige leerlingen wel actief deelnamen aan de les, maar niet wiskundig redeneerden zoals verwacht. Op basis van deze discussie besloten de leraren dat het belangrijk is dat leerlingen voldoende tijd krijgen om actief te werken, eerst zelfstandig, daarna in groep. Leerlingen kunnen zo hun oefeningen bespreken en uitleggen aan elkaar hoe ze te werk gingen. De leraar neemt dan de rol op van een coach, die de leerlingen begeleidt in hun wiskundig denken, hen aanzet tot het oplossen van problemen en waar nodig bijkomende vragen stelt. De leraar kan op die manier de groepsdiscussies faciliteren en begeleiden zodat leerlingen hun redeneervaardigheden gebruiken. Nicholas gaf vervolgens de herziene onderzoeksles in zijn klas. Tijdens de tweede reflectiebijeenkomst merkten Michalis en Nicholas meer kritische incidenten op waarbij studenten bezig waren met wiskundig redeneren. Ze besloten dat zelfs een goed ontworpen les kan worden verbeterd na een gezamenlijk reflectiegesprek.



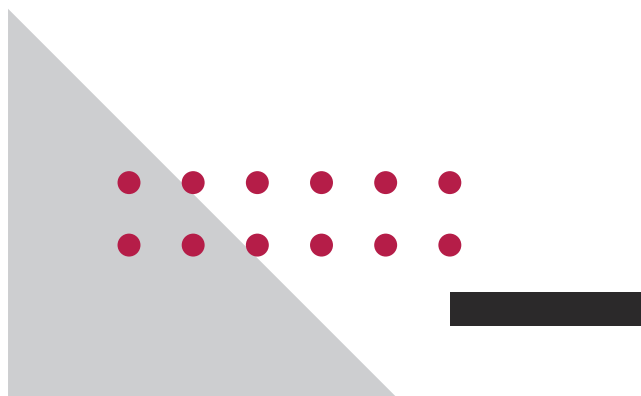
¹³Hiebert et al. (1997)

Tabel 2Overzicht van elementen van wiskundige redeneertaken¹⁴

 Taken met beperkte mogelijkheden tot redeneren	 Taken met mogelijkheden tot redeneren
• Woordproblemen kunnen worden opgelost zonder gebruik te maken van de context, door gebruik te maken van een gememoriseerde procedure die van tevoren is geïntroduceerd (bv. in het tekstboek) • Leerlingen verklaren eerder geleerde feiten, formules, definities • Leerlingen werken binnen één representatie • Leerlingen moeten een verwacht antwoord vinden • Taken die geen verschillende strategieën toelaten	• Leerlingen veralgemenen op basis van voorbeelden • Leerlingen bedenken hun eigen taken of problemen, ook op basis van bepaalde criteria • Leerlingen geven redenen voor de gemaakte keuzes (bv. voor een oplossingsstrategie, een stelling) • Leerlingen maken gebruik van meerdere representaties (grafieken, tabellen, formules) om tot een resultaat te komen • Leerlingen passen een procedure aan en passen deze toe op een nieuw, onbekend probleem • Leerlingen kunnen zien hoe veranderingen in een representatie een andere representatie beïnvloeden (bv. hoe het veranderen van de "helling" de grafiek en de symbolische uitdrukking van een functie beïnvloedt) • Leerlingen ontwerpen een wiskundig model voor een authentieke situatie • Leerlingen ontwikkelen een wiskundig concept (begrip) in de echte wereld

De rol van de leraar bestaat erin om tussenbeide te komen met 'doordachte ondersteuning' die de verkenning en het redeneren van de leerlingen aanmoedigt en in stand houdt, en geen resultaten of belangrijke redeneerstappen weggeeft. Het is dus de verantwoordelijkheid van de leraar om taken te selecteren die grote leerkansen creëren voor leerlingen, om vragen te stellen en zo leerlingen te helpen bij wiskundige begripsontwikkeling, en om te zorgen voor een klascultuur waarin leerlingen werken

aan redeneertaken, idealiter interactief en via samenwerking, en discussiëren en reflecteren over de antwoorden en methodes. Dit soort onderwijs verkleint de rol van de leraar tijdens de (eerste) verkenning, zodat leerlingen meer geneigd zijn om deel te nemen aan het wiskundig gesprek, representaties te delen, ideeën en bewijzen samen te stellen, en uiteindelijk een actievare rol in hun eigen leren op zich te nemen.

¹⁴based on Boston & Smith (2009)

4.2 Leerlingen uitdagen met redeneertaken

Opgaven selecteren die al je leerlingen betrekken bij het wiskundig redeneren is veeleisend, maar zeer relevant voor het ondersteunen van wiskundig redeneren. We bekijken een voorbeeld uit de algebra, met name de invoering van variabelen met woordformules:



Wiskunde opdracht 2¹⁵: Lucifers

Bereken het aantal lucifers in Figuur 4, met de formule: "Aantal lucifers = $2+3 \cdot \text{Patroon nummer}$ "

Figuur 4



- Hoeveel lucifers zitten er in patroon 16?
- Bereken hoeveel lucifers je nodig hebt voor patroon 28
- Sander heeft een doosje met 120 lucifers.
Wat is het nummer van het grootste patroon dat hij kan maken met dit aantal lucifers?



Lerarentaak

Beschrijf wat voor soort wiskundig redeneren de leerlingen hanteren wanneer ze aan Wiskunde opdracht 2 werken. Denk bijvoorbeeld aan het soort representaties dat leerlingen gebruiken, de communicatie die van leerlingen wordt gevraagd en het soort wiskundig denken dat nodig is om de taak op te lossen. Vergelijk dit met de eerdere opdracht (Wiskunde opdracht 1).

Hoewel Wiskunde opdracht 1 en bovenstaande taak over patroonreeksen over de introductie van algebraïsche uitdrukkingen gaan, zul je merken dat het type wiskundig redeneren in de twee taken aanzienlijk verschilt. In de eerste taak uit dit deel (Wiskunde opdracht 1), zijn er voor jouw leerlingen mogelijkheden op vlak van:

- Het verbinden van representaties:** de leerlingen gebruiken het grafische patroon om een structuur te identificeren en vertalen vervolgens de structuur in een rekenkundige of algebraïsche beschrijving van het patroon.
- Communicatie:** de leerlingen kunnen verschillende grafische structuren en symbolische uitdrukkingen vinden. Er zijn daardoor veel mogelijkheden voor de leerlingen om wiskundig te communiceren, bijvoorbeeld door hun verschillende oplossingen te vergelijken of door te argumenteren waarom hun verschillende uitdrukkingen gelijk moeten zijn.
- Conceptuele activering:** de leerlingen ontwikkelen een informeel begrip van het concept variabele als co-variabel getal, door het herkennen van de relatie tussen positie in de reeks en het aantal vierkantjes in de figuur. Ze kunnen dit concept verkennen door eerst met concrete getallen te werken (5, 100). Wanneer leerlingen nadenken over het getal 957, zullen ze dit getal waarschijnlijk als pseudovariabele behandelen, omdat ze het 957e patroon niet meer kunnen visualiseren en dus abstract moeten denken.

¹⁵From Dijkhuis, et al. (2016, p. 74)

De opgave uit het tekstboek (Wiskunde opdracht 2) daarentegen biedt reeds een symbolische uitdrukking en ontnemt de leerlingen dus de mogelijkheid om het patroon te analyseren, structuren te veralgemenen of een algebraïsche uitdrukking te vinden. In plaats daarvan moeten de leerlingen getallen invoeren in een gegeven formule.

- **Het verbinden van representaties:** de leerlingen hoeven geen representaties te verbinden, zij kunnen uitsluitend werken met de gegeven symbolische uitdrukking. Het luciferplaatje is overbodig.
- **Communicatie:** de leerlingen kunnen antwoorden met één woord, namelijk hun numeriek resultaat, en hoeven dus niet te discussiëren of uit te leggen.
- **Conceptuele activering:** de leerlingen werken met de variabele als plaatshouder voor getallen en voeren dienovereenkomstig berekeningen uit, waarbij de variabele wordt voorgesteld als woord-variabele. Omdat ze worden gevraagd berekeningen uit te voeren, ervaren ze niet de co-variantie van het aantal lucifers en de positie in de patroonreeks.

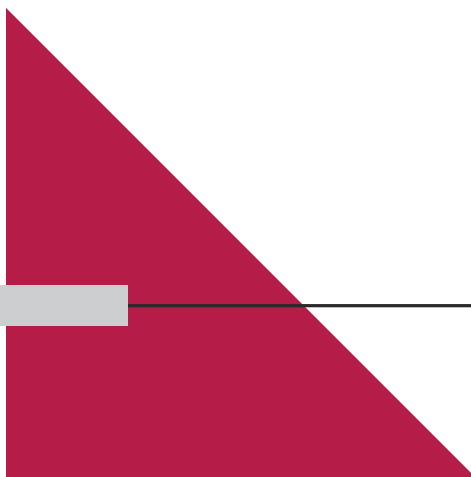
Wat differentiatie betreft, staat Wiskunde opdracht 2 niet open voor verschillende vaardigheidsniveaus van leerlingen. Integendeel, aangezien er maar één oplossingsstrategie is (getallen invoeren), zullen leerlingen die niet goed genoeg zijn in het invoeren van getallen en het berekenen van het resultaat, niet zonder hulp aan de taak kunnen werken. In Wiskunde opdracht 1 kunnen leerlingen verschillende strategieën volgen. Goede leerlingen kunnen een algebraïsche uitdrukking bedenken met de variabele n en complexere visuele structuren en de bijbehorende algebraïsche uitdrukkingen vinden. Minder vaardige leerlingen werken misschien rekenkundig met grote getallen en vinden minder visuele structuren. In principe is er echter een grote kans dat de meeste leerlingen aan de taak zullen kunnen werken, op hun eigen vaardigheidsniveau.

De uitvoering van de twee opgaven verschilt. Wiskunde opdracht 2 is bedoeld om aan leerlingen te geven nadat zij, door middel van een kort stukje theorie in tekstvorm, kennis hebben gemaakt met de oplossingsstrategie van het invoeren van getallen. Wiskunde opdracht 1 is een activerend probleem dat aan het begin van de les aan leerlingen kan worden gegeven, mits de leerlingen de nodige vaardigheid hebben om grafische structuren te herkennen en rekenkundige uitdrukkingen te construeren.



Lerarentaak

Lees de tekst hierboven en denk na over wat dit betekent voor jouw lesplanning. Welke strategieën van leerlingen zou je kiezen om aan de hele klas te presenteren?



4.3 Selecteren, analyseren en aanpassen van redeneertaken voor alle leerlingen



Meneer Janssen besluit zijn lesgeven in de klas te veranderen en zich meer te richten op wiskundig redeneren. Helaas bevat zijn leerboek niet veel redeneeropdrachten. Omdat hij en zijn collega's de leerinhoud van het schooljaar afstemden op het leerboek, moeten zijn lessen dus in overeenstemming blijven met het leerboek. Hij besluit enkele leerboektaken aan te passen en zo hun focus op wiskundig redeneren te verbeteren.

Het vergt heel wat zorgvuldige beslissingen om een les te plannen met een groot potentieel voor wiskundig redeneren. Vooral opgaven vinden met zo'n groot potentieel kan veeleisend en tijdrovend zijn. Bovendien vergt het dikwijls extra inspanningen om deze opgaven uit te printen en te presenteren, omdat ze vaak niet in het gewone leerboek te vinden zijn. Daarom is het een goed compromis om opgaven uit het leerboek te selecteren, en hun potentieel voor wiskundig redeneren te verbeteren door specifieke aanpassingen aan de opgaven te maken.



Wiskunde opdracht 3: Krantenmeisje¹⁶

Marieke verspreidt kranten in haar omgeving. Zij kan uitrekenen wat ze per week in euro's verdient voor haar werk, met de volgende formule: **geld dat ze verdient (in euro's) = $14 + 0.25 \times \text{aantal abonnees}$**

- a) Hoeveel verdient Marieke per week met 40 abonnees?
En met 60 abonnees?
- b) Marieke zegt dat ze met 80 abonnees twee keer zoveel verdient als met 40 abonnees. Onderzoek of dit klopt met behulp van een berekening.
- c) Marieke krijgt er 20 abonnees bij. Hoeveel verdient ze dan meer per week?
- d) Op een bepaald moment verdient Marieke €44 per week. Hoeveel abonnees zijn er op dat moment?

Bekijk Wiskunde opdracht 3. Op vlak van wiskundig redeneren is de taak vergelijkbaar met Wiskunde opdracht 2. Leerlingen redeneren wiskundig door verschillende getallen in te voeren voor het aantal abonnees (40, 60, 80, 20) wat de strategie van vooruit werken vereist, of voor het geld dat ze verdient (44) wat de strategie van achteruit werken vereist. Bij de strategie van achteruit werken moeten leerlingen ook het gelijkheidsteken herkennen als relatie, omdat de gegeven vergelijking achterstevoren gelezen moet worden.

Mits een aantal aanpassingen zou de taak veel bevorderlijker kunnen zijn voor wiskundig redeneren:

- Gebruik een tabel om het bedrag dat Marieke verdient te illustreren voor 20, 40, 60, 80, 100 abonnees in haar omgeving. Teken een grafiek.
- Het bedrijf biedt haar twee alternatieve opties: (1) een startbedrag van €5, en €0,40 per abonnee, of (2) een startbedrag van €20 en €0,15 per abonnee. Geef haar advies over welke optie haar meer geld zal opleveren.
- Marieke wil sparen voor een nieuwe mobiele telefoon. In drie maanden tijd wil ze €650 sparen. Hoeveel abonnees heeft ze daarvoor nodig?

Deze extra opdrachten kunnen de opdrachten **b** tot en met **d** vervangen of aanvullen. Ze bieden meer mogelijkheden voor wiskundig redeneren, aangezien ze het verbinden van representaties en communicatie faciliteren en het concept van de variabele als co-variabel getal activeren.

Bij de aanpassing van de opdracht, worden dus aanpassingen gemaakt met betrekking tot:

- **Het verbinden van representaties:** de leerlingen moeten nu een tabel gebruiken, wat een relevante representatie is om de variabele als co-variabel getal te begrijpen. In Wiskunde opdracht 3 zijn tabellen en grafieken een relevant middel om tot een conclusie te komen.
- **Communicatie:** aan de leerlingen vragen om advies te geven aan Marieke, vereist argumentatie. Aangezien er geen verdere voorwaarden worden gegeven, moeten de leerlingen ook zelf redelijke voorwaarden selecteren om vervolgens een van de alternatieven te kiezen.
- **Conceptuele activering:** bij het vergelijken van verschillende opties onderzoeken de leerlingen de co-variantie tussen het geld dat ze verdient en het aantal abonnees. Zo ontwikkelen ze verder hun begrip van de variabele als co-variabel getal.

Idealiter gaan taken die wiskundig redeneren aanmoedigen verder dan traditionele taken door zich ook te richten op:

1. **Relevantie:** het moet duidelijk worden hoe wiskunde de leerlingen kan helpen om verschijnselen uit het dagdagelijkse leven te begrijpen of het moet leerlingen helpen om hun wiskundig inzicht in een specifiek onderwerp te ontwikkelen.
2. **Verkenning:** in plaats van te werken aan eenvoudige stap-voor-stap procedures, moeten leerlingen actief verschillende oplossingsmethoden kunnen verkennen. Op deze manier verwerven leerlingen conceptueel inzicht.
3. **Reflectie:** leerlingen moeten worden aangemoedigd om na te denken over de leerinhoud of over hun eigen leervorderingen.

¹⁶Adapted from Dijkhuis, et al. (2016, p. 78)

We bekijken nu strategieën die de flexibiliteit van het denken van leerlingen bevorderen.

Strategie 1:

Leerlingen laten terugwerken vanuit specifieke of gegeven resultaten

Veel opgaven kunnen zo worden aangepast dat leerlingen achterwaarts moeten werken om tot specifieke resultaten te komen (zie Wiskunde opdracht 4).

Op die manier redeneren leerlingen over de aard van de taak, en trainen zij tegelijkertijd hun vaardigheden om de opeenvolgende procedures uit te voeren.



Wiskunde opdracht 4: taken aanpassen voor achterwaarts werken¹⁷

Stel dat $a=5$, bereken:

- a) $a+7$
- b) $a-12$
- c) $3a$
- d) $5a+6$
- e) $5(a-3)$
- f) $6-3a$

Je kunt ook 'Stel dat $a=5$, bereken' weglaten en in plaats daarvan vragen:

1. Voor welke a is het resultaat 0?
2. Welke van de uitdrukkingen wordt het grootst, als a groter wordt?
3. Welke van de uitdrukkingen wordt het kleinst, als a kleiner wordt?

Strategie 2:

Structureren

Structureren vraagt aan leerlingen om structuren in een opdracht te herkennen, voor of na het uitvoeren van deze opdracht. In Wiskunde opdracht 5 wordt aan leerlingen gevraagd om algebraïsche vergelijkingen te groeperen volgens hun moeilijkheidsgraad bij het bepalen van de onbekende. Je kunt je ook verschillende soorten

groeperingen voorstellen, bv. bij wiskundige eigenschappen. Leerlingen zou gevraagd kunnen worden kwadratische vergelijkingen te identificeren die het best kunnen worden opgelost met een specifieke procedure, bijvoorbeeld door kwadraatsplitsen.



Wiskunde opdracht 5: taken aanpassen om structureren te vergemakkelijken¹⁸

Oorspronkelijke opdracht

Los de vergelijkingen op

- a. $12p-3=-9p+11$
- b. $6s-15=75$
- c. $10k-5=88k+34$
- d. $5x-15=71+3x$
- e. $710+6a=630+12a$
- f. $1.5x+70=0.7x+150$

Redeneeropdracht

Gropeer de vergelijkingen in makkelijke en moeilijke vergelijkingen. Wat maakt sommige vergelijkingen moeilijk?

¹⁷Adapted from Dijkhuis, et al. (2016, p. 81)

¹⁸Mathematics task 5, 6, 7 and 9 are from De Bruijn, et al. (2018)

Strategie 3:**Operatieve variatie**

Door leerlingen te laten werken aan taken waarbij één parameter systematisch wordt veranderd, kunnen leerlingen patronen waarnemen. Er zijn verschillende manieren om opgaven te introduceren die variatie in operatoren creëren.

Wiskunde opdracht 6 illustreert dat door een specifiek element op een systematische manier te veranderen, waardoor leerlingen patronen kunnen ontdekken. Tegelijkertijd ontwikkelen ze hun procedurele vaardigheid aangezien ze een specifieke procedure herhaaldelijk moeten uitvoeren.



Wiskunde opdracht 6: variatie in operatoren in de context van lineaire functies

Oorspronkelijke opdracht

Bereken voor elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt van de overeenkomstige grafieken.

- $y=2x+8$ en $y=6x-12$
- $y=7-x$ en $y=x+1$
- $y=-\frac{1}{2}x+4$ and $y=-3\frac{1}{2}x+19$

Redeneeropdracht

- Verander de 2 in de eerste uitdrukking in 1, 3, 4, 5, 6, ...
Hoe zal het snijpunt veranderen?
- Verander 8 in de eerste uitdrukking in 1, 2, 3, ...
Hoe zal het snijpunt veranderen?

Strategie 4:**Voorbeelden bedenken**

Door leerlingen voorbeelden en tegenvoorbeelden met specifieke eigenschappen te laten bedenken, kunnen ze aan omgekeerd redeneren doen (zie Wiskunde opdracht 7). Op die manier denken leerlingen na over wat opgaven moeilijk of gemakkelijk maakt. Dergelijke taak wordt het best gedaan in tweetallen of groepjes, zodat leerlingen samen kunnen brainstormen en hun ideeën kunnen bespreken.

Als aan leerlingen gevraagd wordt om hun werk te vergelijken en te categoriseren, zoals in strategie 2 (structureren), ontstaan er nog meer redeneermogelijkheden.



Wiskunde opdracht 7: voorbeelden bedenken met specifieke eigenschappen voor lineaire functies

Oorspronkelijke opdracht

Bereken voor elk paar lineaire formules de coördinaten van het snijpunt van de overeenkomstige grafieken.

- $y=2x+8$ en $y=6x-12$
- $y=7-x$ en $y=x+1$
- $y=-\frac{1}{2}x+4$ and $y=-3\frac{1}{2}x+19$

Redeneeropdracht

- Vind twee lijnen die elkaar snijden in (3,4).
- Vind twee lijnen die elkaar snijden in (-3,4)
- Vind twee lijnen die elkaar snijden in (3,-4)
- Vind twee lijnen die elkaar snijden in (-3,-4)

Bekijk Wiskunde opdracht 8 over het gemiddelde en rekenkundig gemiddelde. Deze taak houdt niet direct verband met een traditionele opgave uit het tekstboek, maar laat zien dat sommige

interpretatietaken waarbij leerlingen een bewering onderzoeken door voorbeelden/tegenvoorbeelden te bedenken en erover na te denken, relatief eenvoudig kunnen worden verzonden.



Wiskunde opdracht 8:

Een stelling onderzoeken door voorbeelden te verzinnen en erover na te denken¹⁹

Het gemiddelde van vier getallen is negatief.

- A) Kunnen alle vier getallen negatief zijn? Leg uit.
- B) Kunnen alle vier getallen positief zijn? Leg uit.
- C) Kunnen slechts twee van de vier getallen positief zijn? Leg uit.

- D) Kunnen slechts drie van de vier getallen negatief zijn? Leg uit.
- E) Kan slechts één van de vier getallen negatief zijn? Leg uit.

Strategie 5: toepassing

Toepassingsopgaven worden vrij vaak gebruikt in tekstboeken. Vaak kunnen ze worden aangepast om hun potentieel voor wiskundig redeneren te verbeteren. De vorige strategieën kunnen worden toegepast om toepassingstaken te verbeteren. Daarnaast kunnen

leerlingen aangemoedigd worden om wiskundig te communiceren wanneer hen gevraagd wordt om twee opties te vergelijken (zie Redeneeropdracht 3 of Wiskunde opdracht 9) of na te denken over de vraag of een wiskundig model zinvol is in de echte wereld.



Wiskunde opdracht 9:

toepassingsopgaven en extra redeneeropgaven

Oorspronkelijke opdracht

Vrachtwagenchauffeurs moeten betalen om van de veerboot gebruik te maken. Het tarief is afhankelijk van de lengte van de vrachtwagen. Er geldt een vast bedrag van €20 plus €2 per meter lengte van de vrachtwagen.

- a. Bepaal een formule voor het bedrag dat een vrachtwagenchauffeur die de veerboot gebruikt moet betalen.
- b. Het tarief wordt gewijzigd. Het vaste bedrag stijgt met 10%, maar het bedrag per meter daalt met 10%. Bepaal een formule voor het nieuwe tarief.

Redeneeropdracht

1. Wat gebeurt er met de formule als het tarief verandert met een verhoging van 20% op het vaste bedrag, en een verlaging van 20% per meter?
2. Wat als beide weer met 30% veranderen? 40%, 50%, 100%?
3. Welke van deze opties is de beste voor de veerbootmaatschappij? Waarom?



Ahmed en Amir zijn twee zeer ervaren docenten uit Nederland die lesgeven in het derde en vierde jaar voortgezet (secundair) onderwijs. Ze namen in 2022-2023 deel aan het LESSAM project. Bij het voorbereiden van een onderzoeksles leerden ze hoe wiskundige taken uit dit handboek kunnen worden aangepast om wiskundig denken en redeneren te stimuleren. Ze wilden een reeks taken ontwikkelen om studenten geëngageerd te houden (niet te vervelen maar ook niet te frustreren). Samen bekeken ze de rekenopgaven 4 t/m 9 uit dit handboek (zie hierboven). Ze besloten dat ze de stelling van Pythagoras

wilden behandelen in de onderzoeksles, een nieuwe reeks taken wilden creëren, die in moeilijkheidsgraad zouden oplopen, en de leerlingen in groepen zouden verdelen om aan deze reeks taken te werken. Ahmed is erg tevreden over de ontwikkelde taken: ze zijn creatief en ze geven de mogelijkheid om te differentiëren. Na de onderzoeksles vertelde hij: "Wat ik heel positief vond, was dat bijna alle leerlingen echt betrokken waren, hard werkten en het af wilden maken. Bijna allemaal hebben ze de taken afgemaakt, dus dit was een zeer positieve ervaring voor mij."

¹⁹from Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012), p.612

4.4 Redeneertaken uitvoeren in een les die het wiskundig redeneren bevordert



Mevrouw van den Heuvel heeft een redeneeropdracht gekozen voor haar volgende les. Ze is heel blij met haar keuze en denkt dat haar leerlingen gemotiveerd zullen zijn door haar taak. Toch weet ze niet zeker of de taak aansluit bij de competenties van haar leerlingen. Ook vraagt ze zich af of alle leerlingen wel de nodige voorkennis hebben om aan het probleem te werken. Ter compensatie besluit ze de taak te introduceren door de moeilijkheden in de taak uit te leggen en door strategieën voor te stellen die de leerlingen kunnen volgen. Hoewel mevrouw van den Heuvel goede bedoelingen had, verminderde ze hierdoor de mogelijkheden van haar leerlingen om wiskundig te redeneren. Een redeneertaak vereist immers specifieke lesstrategieën: het vereist vooral het vertrouwen dat een probleem voor iedereen benaderbaar is en dat leerlingen hun eigen weg vinden

We hebben gezien dat het ontwikkelen van het wiskundig redeneren van leerlingen een kernaspect is van het (aan)leren van wiskunde²⁰, en dat daarbij het selecteren en aanpassen van taken van cruciaal belang is. Om het wiskundig redeneren van leerlingen te bevorderen terwijl ze aan redeneertaken werken, moeten leraren echter ook weten hoe ze strategische vragen moeten stellen en hoe ze kunnen zorgen voor een leeromgeving en klascultuur die leerlingen kansen biedt om het wiskundig redeneervermogen te ontwikkelen. Op deze aspecten zoomen we nu verder in.

Strategisch ondervragen

Strategische vragen stellen is cruciaal om redeneren te ondersteunen, omdat het de ideeën en inzichten van leerlingen naar boven haalt. Vervolgens kan in de klas over deze ideeën en inzichten worden gediscussieerd, zodat gezamenlijk tot oplossingen kan gekomen worden. De vragen die de leraar stelt, spelen dan ook een cruciale rol bij de begripsvorming, de opbouw van nieuwe kennis en het delen van ideeën²¹ bij leerlingen. Met andere woorden, **vaardig vragen stellen naar de strategieën van leerlingen kan leraren een dieper inzicht verschaffen in de ontwikkeling van het wiskundig inzicht van leerlingen**. Bovendien helpt het leraren om weloverwogen beslissingen te nemen voor hun volgende lessen²².

Onderzoekers ontwikkelden een model waarbij de strategische vragen die leraren dienen te stellen opgedeeld worden in drie hoofdtypen²³:

- **Proberende vragen** zijn vragen die leerlingen stimuleert om hun denkwijze uit te leggen, bewijzen aan te dragen, en hun voorkennis te gebruiken bij het uitvoeren van de taak. Deze vragen verruimen het conceptuele begrip van de leerlingen en moedigen hen aan om nieuwe ideeën te koppelen aan eerdere begrippen.
- **Sturende vragen** begeleiden de probleemoplossing van leerlingen door te vragen naar oplossingen, strategieën of procedures, en bevorderen zo het conceptuele begrip. Sturende vragen kunnen leerlingen helpen om hun eigen oplossingen te creëren en wiskundige concepten af te leiden.
- **Feitelijke vragen** zijn vragen naar feiten of definities, en antwoorden of volgende stappen in een probleem.



Anna en Riadh uit Vlaanderen (België) geven les in het derde jaar secundair (voortgezet) onderwijs. In 2022-2023 namen ze deel aan het LESSAM project. De twee leraren zijn het gewoon om direct het antwoord te geven als leerlingen een vraag stellen. In de onderzoeksles probeerden ze meer strategische vragen te stellen, zodat leerlingen zelf moesten nadenken over hun oefeningen. Ze wilden weten wat het effect was van dit soort vragen op de zelfredzaamheid van hun leerlingen. Ze gebruikten volgende proberende, sturende en feitelijke vragen in hun lessen:

- proberende vragen: Hoe ben je tot die stappen gekomen? Waarom heb je die manier gebruikt?
- sturende vragen: Wat vind je van de oplossing van groep A...? Wat vind jij van de oplossing/tekening van...?
- feitelijke vragen: Wat is tautologie ook alweer? Wanneer is een getal even? Wat zegt de stelling van Pythagoras?

Anna was verrast omdat “de leerlingen de oefening bleven proberen en niet opgaven wanneer ze vastliepen of ze het te moeilijk vonden”.

In het PRIMAS EU project²⁴ werden vijf principes voor een effectieve vraagstelling geformuleerd:

- Plan vragen die aanzetten tot denken en redeneren.
- Stel vragen op een manier waarbij iedereen betrokken is.
- Geef leerlingen tijd om na te denken.
- Vermijd een oordeel over de antwoorden van leerlingen.
- Reageer op antwoorden van de leerlingen op een manier die aanzet tot dieper nadenken

²⁰ e.g., Boaler (2010)

²¹ Moyer & Milewicz (2002)

²² Jacobs et al., 2010

²³ Sahin and Kulm (2008)

²⁴ Utrecht University (2022)



Lerarentaak

Wanneer u in Lesson Study een les of een videoclip observeert, ga dan na welke van deze vijf principes in de les worden gebruikt.

Wat zijn vragen waarbij iedereen betrokken is?

Hoe worden foute antwoorden beoordeeld of goede antwoorden gewaardeerd?

Vervolgens kan aan de hand van vragen die door de leraar gesteld en door de leerling(en) beantwoord worden, nagegaan worden wat de leerlingen uit de les geleerd hebben. De antwoorden van leerlingen onthullen veel over hun denken²⁵ en zijn dus een belangrijk instrument om na te gaan hoe en op welk niveau zij wiskundig denken.

Sociale cultuur van de klas

De inbreng van leraren is van cruciaal belang bij de totstandbrenging van wiskundige leergemeenschappen. Wiskundig redeneren en wiskundig begrip vloeien van nature voort uit de communicatie die in dergelijke gemeenschappen plaatsvindt²⁶. Wiskundige leergemeenschappen worden beschreven als klaslokalen waar leerlingen wiskundig leren praten en werken door deel te nemen aan wiskundige discussies, argumenten voor te stellen en te verdedigen, en te reageren op de ideeën en vermoedens van hun medeleerlingen²⁷. Aldus bieden wiskundige discussies in de hele klas, die op gang worden gebracht door redeneertaken²⁸, mogelijkheden om het wiskundig redeneren van de leerlingen te ontwikkelen. Het ontwerpen en

formuleren van denkopgaven leidt tot dergelijke discussies, die op hun beurt leiden tot een cultuur van rechtvaardigen en bewijzen.

Een klaslokaal is een gemeenschap van lerenden. De totstandbrenging van een leergemeenschap waarin leerlingen wiskundig begrip opbouwen, betekent dat bepaalde verwachtingen en normen (die bewijzen en redenering bevorderen) moeten worden vastgesteld voor de manier waarop leerlingen met elkaar omgaan in de context van wiskunde. Daarbij is interactie essentieel, aangezien communicatie noodzakelijk is voor het opbouwen van begrip. De sociale cultuur die past bij het onderwijs dat wij voor ogen hebben²⁹ heeft vier kenmerken: (1) ideeën en methoden, geuit door leerlingen, worden gewaardeerd (omdat ze potentieel bijdragen aan ieders leren en dus respect verdienen); (2) leerlingen kiezen en delen hun methoden (omdat er een verscheidenheid aan methoden is die respect verdient); (3) fouten zijn leermogelijkheden voor iedereen (omdat ze potentieel ieders analyseniveau verhogen); en (4) correctheid zit in wiskundige argumenten (omdat de overtuigingskracht van een verklaring of rechtvaardiging afhangt van de wiskundige waarde die ze heeft, niet van bv. de populariteit of sociale status van de presentator).

²⁵Sfard (2008)

²⁶Yackel & Cobb (1996)

²⁷Goos (2004)

²⁸Ruthven (1989)

²⁹Hiebert et al. (1997, p. 12)

Oplossingen van leerlingen delen tijdens klasdiscussies

De volgende opdracht heeft betrekking op “Het delen van oplossingen van leerlingen in discussies met de hele klas.” (EU Educate project³⁰):

Bekijk de volgende opdracht, ontworpen en uitgevoerd in het eerste middelbaar/brugklas in Griekenland. De taak zoals die op het werkblad van de leerlingen stond is de volgende:



Wiskunde opdracht 10: een probleem oplossen

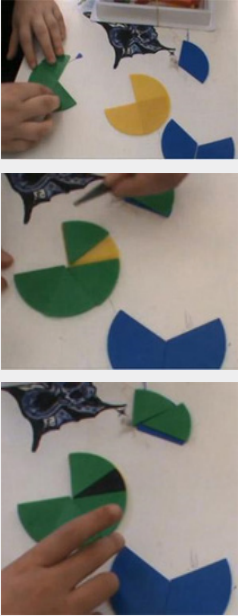
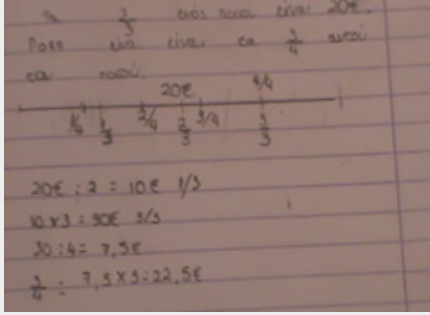
$\frac{2}{3}$ van een hoeveelheid is €20. Hoeveel is $\frac{3}{4}$ van de hoeveelheid?

- Je kunt het probleem oplossen met verschillende materialen (staafjes, breukcirkels, kralen, doorzichtig papier, papier met breukcirkels, vierkant papier, breukstaven) en overeenkomstige representaties.
- Probeer zoveel mogelijk benaderingen uit.
- Benaderingen die alleen een rekenkundige methode volgen (bv. reductie tot de breukeenheid) worden niet aanvaard. Deze methoden kunnen naast andere worden opgenomen.

De leerlingen werkten in groepjes van drie of vier gedurende ongeveer 10 minuten aan de opdracht. Tabel 3 toont enkele van hun antwoorden.

Tabel 3

Antwoorden van leerlingen op Wiskunde opdracht 10

Oplossing van groep 1	Oplossing van groep 2	Oplossing van groep 3
De leerlingen construeerden een staaf door aan een oranje staaf een rode staaf toe te voegen ($=10+2$). Ze beschouwden dit als een eenheid en verdeelden deze in vierden (vier groene staafjes; $=3+3+3+3$), derden (drie blauwe staafjes; $=4+4+4$) en twaalfden (twaalf witte staafjes; $=12 \times 1$). Het witte staafje is het verschil tussen de 3 groene staafjes (die $\frac{3}{4}$ voorstellen) en de 2 blauwe staafjes (die $\frac{2}{3}$ voorstellen) en dit verschil is $\frac{1}{12}$. Hetzelfde model wordt voorgesteld met de breukschijven. 	De leerlingen berekenden $\frac{3}{4}$ (gele stukjes) van de hoeveelheid door gebruik te maken van groene, blauwe en zwarte stukjes. Aanvankelijk gebruikten zij breukstukken van $\frac{1}{6}$ (groene) om $\frac{2}{3}$ (blauwe) te meten door vast te stellen dat $\frac{2}{3}$ wordt bedekt door $\frac{4}{6}$. Vervolgens losten ze het probleem op door met zwarte staafjes te werken (“als we $\frac{1}{12}$ optellen bij $\frac{2}{3}$ is dit gelijk aan $\frac{3}{4}$”). 	Deze groep gebruikte een rekenkundige methode en de getallenlijn. 

³⁰Educate (2022)



Lerarentaak

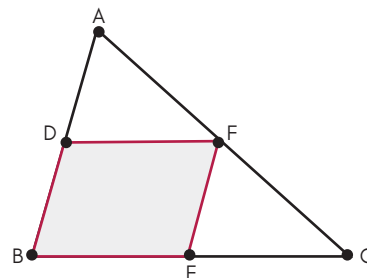
Denk na over de volgende punten:

- Bespreek de redenering van de leerlingen in de oplossing van elke groep. Wat zijn verschillen en overeenkomsten in de redeneringen?
- Stel je voor dat je een klasdiscussie wilt voeren om verder te werken met de strategieën en ideeën van leerlingen. Hoe zou je de drie oplossingen rangschikken? Geef redenen voor je keuze. Houd in gedachten dat redeneren in klasdiscussies het voorstellen en verdedigen van argumenten inhoudt, en het reageren op de ideeën en vermoedens van medeleerlingen. Motiveer je beslissing rekening houdend met de mate waarin het bespreken van de oplossing het inzicht van alle leerlingen bevordert, en de rol van de verschillende representaties.
- Hoe kun je de vorming van een leergemeenschap in de klas hierboven bevorderen?



Wiskunde opdracht 11: driehoek en vierhoek

In de figuur zijn de punten D, E en F de middens van de zijden van de driehoek ABC. Bestudeer hoe de vierhoek BDFE verandert als de driehoek ABC verandert. Dat wil zeggen, hoe het type van de vierhoek samenhangt met het type van de driehoek.



Lerarentaak

Lees Wiskunde opdracht 11. Hieronder vind je een fragment van een groepsdiscussie. Nadat de opgave klassikaal werd besproken, gaan de leerlingen in groepjes aan de slag om te bestuderen hoe de vierhoek BDFE verandert als de driehoek ABC verandert. De leraar benadert een groepje met vier jongens en zij beschrijven hun werk: *LLN= leerling, LK = leraar

LLN1: Als het een rechthoekige driehoek is, zal het ofwel een vierkant ofwel een rechthoek zijn, omdat het een rechte hoek heeft en de vierhoek parallellogram blijft.

LLN2: Ja, dat wil zeggen, in elke soort van driehoek blijft het een rechthoek.

LK: Prima, maar er zijn hier speciale categorieën van parallellogrammen. Je hebt het over een rechthoek, over een vierkant, enz. Wanneer is het een rechthoek? Wanneer is het een vierkant? Het doel is om te onderzoeken en te verbinden wat voor soort parallellogram het is, en wanneer het gebeurt. [Ze praten niet] Kun je me uitleggen welke vorm dit is S1?

LLN1: De driehoek is rechthoekig.

LK: Inderdaad.

LLN 1: BDFE is rechthoekig en kan een vierkant of rechthoek zijn.

LK: Je komt onmiddellijk in een proces dat zegt als - dan. Als de driehoek rechthoekig is, dan is de vierhoek een rechthoek. Hou dit vast. Dit idee. Als - dan. Dat wil zeggen, verbinden wat het ene [de driehoek] is met wat het andere [het parallellogram] is.

LLN3: Dus, we zullen zeggen, bijvoorbeeld, als de driehoek ongelijkzijdig is dan dit, als deze gelijkzijdig is dan dit?

LK: Ik weet het niet. Is dit het punt? Maakt niet uit. Ja misschien.

LLN3: Vertel ons gewoon wat voor veronderstellingen we moeten maken...

LK: ... Dat wil zeggen, hoe de soort [benadrukt het woord "soort"] van de vierhoek zich verhoudt tot de soort [benadrukt het woord "soort"] van de driehoek.

LLN3: Ah, dat wil zeggen, als de vierhoek rechthoekig is, dan is de driehoek dat ook ...

LK: Ja, als je dat denkt ...

LLN3: [lachend] Kom op... meneer [alsof hij klaagt dat hij geen duidelijk antwoord krijgt]

LK: Ja, maar ik wil het je niet vertellen, ik wil dat je zelf nadenkt. De vraag is hoe het type vierhoek zich verhoudt tot het type driehoek. Doe maar wat je wilt.

De leraar gaat weg en benadert een andere groep.

Beantwoord de volgende vragen:

- Wat is het verband tussen deze opdracht en wiskundig redeneren?
- Wat zijn de belangrijkste moeilijkheden waarmee leerlingen in dit fragment te maken krijgen?
- Waarom denk je dat de leraar de leerlingen laat zitten zonder een definitief antwoord? Wat zou hij anders kunnen doen?
- Realiseert de leraar zich de vijf principes van effectieve vraagstelling (paragraaf 4.4)? Waarom wel of waarom niet?

4.5 Wiskundig redeneren van leerlingen opmerken

In de context van Lesson Study is het doel om je bewuster te worden van relevante gebeurtenissen in de klas die verband houden met het wiskundig redeneren van je leerlingen en met de impact van je onderwijsacties. Bijvoorbeeld, stel je voor dat je in de schoenen staat van de leraar in de episode hierboven – zou je in staat zijn om de wiskundige argumentatie in het moment op te merken, om strategische vragen te stellen die voortbouwen op deze argumentatie? Dergelijke in-het-moment-opmerkingen maken en beslissingen nemen is zeer veeleisend.

In het onderzoek naar wiskundeonderwijs is een theoretisch concept ontwikkeld dat aan deze behoefte beantwoordt, namelijk “teacher noticing”. Het is geïntroduceerd in de lerarenopleiding wiskunde om verschuivingen in de aandacht van leraren te bestuderen en zo verschillende niveaus van opmerkzaamheid aan de orde te stellen³¹. Noticing wordt beschouwd als een complexe actie waarbij leraren betrokken zijn bij het identificeren van wat betekenisvol is in een interactie in de klas, het interpreteren van dit opmerkelijke voorval op basis van hun kennis en ervaringen en het koppelen daarvan aan bredere principes van (aan)leren van wiskundig redeneren³².

Lesson Study biedt een ideale context voor leraren om te leren hoe ze interacties in de klas kunnen observeren, interpreteren en bespreken met betrekking tot het wiskundig redeneren van leerlingen. Het opmerken van kritische gebeurtenissen in de

klas zou moeten leiden tot geïnformeerde onderwijsbeslissingen die voortbouwen op het redeneren van leerlingen en dat redeneervermogen verder ontwikkelen. Dit opmerken omvat verschillende stappen:

1. het monitoren van opmerkelijke (potentieel essentiële) gebeurtenissen,
2. de interpretatie van opmerkelijke gebeurtenissen met betrekking tot de lesdoelen en het begrip van de leerlingen, en
3. de reactie op de gebeurtenissen met passende pedagogische acties, zoals welke opdracht voor de volgende les moet worden gekozen of welke vervolgvraag tijdens een klasdiscussie moet worden gesteld.

Het belangrijkste element binnen deze drie stappen is of de onderbouwing van het didactisch handelen gebaseerd is op de principes van goed onderwijs en leren³³ (bv. effectieve vraagstelling, zie paragraaf 4.4). De drie bovenstaande stappen kunnen worden ondersteund door het gebruik van didactische hulpmiddelen die de interpretatie van de redenering van de leerlingen begeleiden of de gedetailleerde analyse van videolessen met als doel de specifieke wiskundige denkstappen van de leerlingen uit te splitsen.

In de volgende taak voor de docent geven we een voorbeeld van een belangrijke gebeurtenis en vragen die de leraar kunnen helpen bij het opmerken van de aspecten die hierboven besproken zijn:



Lerarentaak

In het eerste middelbaar/brugklas worden de leerlingen gevraagd om de volgende opdracht op te lossen:

“Kan je de twee kolommen met getallen hieronder optellen tot hetzelfde totaal door slechts twee getallen tussen de kolommen te wisselen? Leg uit waarom wel of niet.”

1	7
3	2
8	4
5	9

- a) Los dit probleem op en beschrijf mogelijke oplossingsstrategieën.
- b) Op welke aspecten van het wiskundig redeneren van leerlingen heeft dit probleem betrekking?
- c) Stel je voor dat je een leraar bent in het eerste middelbaar/brugklas en dat je dit probleem aan de leerlingen hebt voorgelegd. Denk na over mogelijke gebeurtenissen die zich kunnen voordoen in verband met de argumentatie en redenering van de leerlingen en schrijf een hypothetische dialoog tussen jou en de leerlingen of de leerlingen onderling rond een van de gebeurtenissen die jij als kritisch beschouwt. Leg uit waarom je deze gebeurtenis als belangrijk beschouwt.

³¹Mason (2002)

³²e.g., van Es & Sherin (2010)

³³van Es (2011)

4.6 Redeneeracties van leerlingen beoordelen

Ondanks de significante rol van redeneren in wiskundelessen ondervinden veel leraren moeilijkheden bij het beoordelen ervan³⁴. Dit is te wijten aan de complexiteit die gepaard gaat met het nauwkeurig oordelen over de redeneerhandelingen van leerlingen, alsook aan de noodzaak om gebruik te maken van meerdere bewijsbronnen voor het beoordelen van de redeneervaardigheden van leerlingen³⁵. Deze complexiteit leidt ertoe dat leraren problemen met redeneervaardigheden bij leerlingen moeilijk opmerken en dus ook moeilijk geschikte aanwijzingen kunnen geven om die vaardigheden te verbeteren³⁶.

De Rubriek voor het beoordelen van wiskundig redeneren werd ontworpen om de redeneervaardigheden van leerlingen te

evalueren en te beoordelen. Het is een gedetailleerde rubriek die de drie redeneerhandelingen omvat: Analyseren (het verkennen van de redeneertaak en het verbinden met bekende feiten en eigenschappen; Generaliseren (het identificeren van gemeenschappelijke eigenschappen of patronen over gevallen heen of het vormen van vermoedens); en Rechtvaardigen (nagaan of vermoedens waar zijn of het gebruik van logische argumenten om anderen te overtuigen) op vijf vaardigheidsniveaus (niet aanwezig, beginnend, ontwikkelend, consoliderend, en gevorderd). Deze rubriek kan gebruikt worden als een formatief beoordelingsinstrument tijdens dialogische interacties in de klas, wanneer leraren de redenering van de leerlingen trachten uit te lokken door middel van gesprekken en vragen.

Tabel 4

Rubriek voor het beoordelen van wiskundig redeneren³⁸

	 Analyseren	 Generaliseren	 Rechtvaardigen
Niet aanwezig	- Merkt de numerieke of ruimtelijke structuur van voorbeelden van gevallen niet op. - Besteedt aandacht aan de niet-wiskundige aspecten van de voorbeelden of gevallen.	Geeft geen gemeenschappelijke eigenschap of regel voor het patroon.	- Niet te rechtvaardigen. - Doet beroep op leraar of anderen.
Beginnend	- Ziet overeenkomsten tussen voorbeelden. - Herinnert zich willekeurige bekende feiten die verband houden met de voorbeelden. - Herinnert zich en herhaalt patronen die visueel of met behulp van materialen zijn weergegeven. - Probeert zaken te sorteren op basis van een gemeenschappelijke eigenschap.	- Vestigt aandacht op een gemeenschappelijke eigenschap of herhaalde componenten van een patroon door gebruik te maken van: - Lichaamstaal (gebaar) - Tekening - Concrete materialen - Tellen - Mondelinge taal (metaforen)	- Beschrijft wat hij/zij deed en waarom het al dan niet juist is. - Herkent wat goed of fout is met behulp van materialen, voorwerpen of woorden. - Oordeelt op basis van eenvoudige criteria, zoals bekende feiten. - Het argument is misschien niet coherent of omvat niet alle stappen van het redeneerproces.
Ontwikkelend	- Merkt een gemeenschappelijke of ruimtelijke eigenschap op. - Herinnert en herhaalt patronen met behulp van numerieke structuur of ruimtelijke structuur. - Sorteert en classificeert zaken volgens een gemeenschappelijke eigenschap. - Zet zaken op volgorde om aan te tonen wat hetzelfde is/blijft en wat anders is/verandert. - Beschrijft het geval of patroon door de categorie of de reeks te labelen.	Communiqueert een regel (vermoeden) over een: - Eigenschap met behulp van woorden, diagrammen of cijferzinnen. - Patroon met behulp van woorden, diagrammen om recursie te tonen of cijferzinnen om het patroon over te brengen als herhaalde optelling. - Registreert andere gevallen die aan de regel voldoen (vermoeden) of breidt het patroon uit door gebruik te maken van de regel.	- Probeert te verifiëren door gevallen te testen of de betekenis van een vermoeden uit te leggen aan de hand van één voorbeeld. - Fouten en inconsistenties opsporen en corrigeren met behulp van materiaal, schema's en informele schriftelijke methoden. - Uitgangspunten in een logisch argument zijn correct en worden door de klas aanvaard.

³⁴Herbert (2021)

³⁵Davidson, Herbert & Bragg (2019)

³⁶Llinares (2013)

³⁷Australian Academy of Science (2018)

³⁸Australian Academy of Science (2018).



Analyseren



Generaliseren



Rechtvaardigen

Consoliderend

- Merkt meer dan één gemeenschappelijke eigenschap op door systematisch verdere gevallen te genereren en/of een reeks bekende feiten of eigenschappen op te sommen en te overwegen.
 - Herhaalt en breidt patronen uit met gebruikmaking van zowel de numerieke als de ruimtelijke structuur.
 - Zoekt en bedenkt voorbeelden:
 - Gebruik van instrumenten, technologie en modellering
 - Doet voorspellingen over andere zaken:
 - Met dezelfde eigenschap
 - Inbegrepen in het patroon
- Generaliseert: deelt een regel (vermoeden) mee met behulp van wiskundige termen, symbolen of diagrammen (bv. een getalenzin of een gelabeld meetkundig diagram).
 - Legt uit wat de regel (vermoeden) betekent aan de hand van één voorbeeld.
 - Breidt het patroon uit met een voorbeeld om uit te leggen hoe de regel werkt.
- Controleert de waarheid van beweringen door gebruik te maken van een gemeenschappelijke eigenschap, regel of bekend feit dat elk geval bevestigt. Kan ook gebruik maken van materialen en informele methoden.
 - Weerlegt een bewering door een tegenvoorbeeld te gebruiken.
 - Gebruikt een correct logisch argument dat een volledige redeneerketen heeft en woorden gebruikt als 'omdat', 'als ... dan ...', 'daarom', 'en dus', 'dat leidt tot', ...
 - Breidt de veralgemening uit met logische argumenten.

Gevorderd

- Ziet en onderzoekt relaties tussen:
- Gemeenschappelijke eigenschappen
 - Numerieke structuren en patronen
- Generaliseert: deelt de regel (het vermoeden) mee met behulp van wiskundige symbolen.
 - Past de regel toe om verdere voorbeelden of gevallen te vinden.
 - Generaliseert eigenschappen door een uitspraak te doen over de relatie tussen gemeenschappelijke eigenschappen.
 - Vergelijkt verschillende symbolische uitdrukkingen die gebruikt worden om hetzelfde patroon te definiëren om de gelijkwaardigheid aan te tonen.
- Gebruikt een waterdichte logische redenering die wiskundig correct is en niets onverklaarbaars laat.
 - Controleert of de bewering waar is en of de veralgemening geldt voor alle gevallen, met gebruikmaking van logische argumenten.

Hieronder geven we een voorbeeld van hoe deze rubriek door leraren kan worden gebruikt.



Wiskunde opdracht 12: handdrukken en vliegtuigen

1. Tien mensen hebben een vergadering bijgewoond. Als iedereen elkaar een hand heeft gegeven, hoeveel handdrukken werden er dan gegeven?
2. Een nieuwe internationale luchtvaartmaatschappij gaat 12 luchthavens in 12 verschillende landen met elkaar verbinden. Wat zijn alle mogelijke routes die de luchtvaartmaatschappij zal moeten creëren?

Oplossing leerling 1

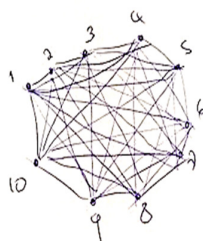
$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ handshakes}$$

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ routes}$$

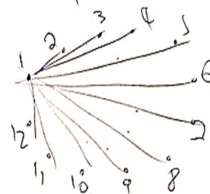
They both can be solved using combination.

Oplossing leerling 2

They are both math problems,



$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$



$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66$$

They are connecting things.
I make many connections among the dots to solve them. (Similar problems)



Lerarentaak

- a) Los het probleem op in Wiskunde opdracht 12.
- b) Hierboven zie je de oplossingen van twee leerlingen voor Wiskunde opdracht 12. Zie je overeenkomsten tussen hun oplossingen? Schrijf deze overeenkomsten op.

In wat volgt, beoordelen we het wiskundig redeneren van leerling 1 en leerling 2. Leerling 1 merkt op dat het probleem te maken heeft met combinaties. Hij/zij gebruikt een wiskundig steekhoudend argument. Hij/zij gebruikt symbolische uitdrukkingen om hetzelfde

patroon in de twee problemen te definiëren. Hij/zij kan de regel toepassen op vergelijkbare problemen. Leerling 1 redeneert op het gevorderde niveau.

Gevorderd	Ziet en onderzoekt relaties tussen: - Gemeenschappelijke eigenschappen - Numerieke structuren en patronen	- Generaliseert: deelt de regel (het vermoeden) mee met behulp van wiskundige symbolen. - Past de regel toe om verdere voorbeelden of gevallen te vinden. - Generaliseert eigenschappen door een uitspraak te doen over de relatie tussen gemeenschappelijke eigenschappen. - Vergelijkt verschillende symbolische uitdrukkingen die gebruikt worden om hetzelfde patroon te definiëren om de gelijkwaardigheid aan te tonen.	- Gebruikt een waterdichte logische redenering die wiskundig correct is en niets onverklaarbaars laat. - Controleert of de bewering waar is en of de veralgemening geldt voor alle gevallen, met gebruikmaking van logische argumenten.
------------------	---	--	--

Leerling 2 begint een vorm van redeneren te ontwikkelen in termen van zijn generaliserende handelingen. Hij/zij gebruikt numerieke en ruimtelijke redeneerpatronen. Hij/Zij begrijpt de regel en kan deze

uitbreiden naar soortgelijke gevallen. Hij/Zij legt zijn regel ruimtelijk uit door stippen te verbinden. De redeneeracties van leerling 2 bevinden zich op het ontwikkelingsniveau.

Ontwikkend	- Merkt een gemeenschappelijke of ruimtelijke eigenschap op. - Herinnert en herhaalt patronen met behulp van numerieke structuur of ruimtelijke structuur. - Sorteert en classificeert zaken volgens een gemeenschappelijke eigenschap. - Zet zaken op volgorde om aan te tonen wat hetzelfde is/blijft en wat anders is/verandert. - Beschrijft het geval of patroon door de categorie of de reeks te labelen.	Communiqueert een regel (vermoeden) over een: - Eigenschap met behulp van woorden, diagrammen of cijferzinnen. - Patroon met behulp van woorden, diagrammen om recursie te tonen of cijferzinnen om het patroon over te brengen als herhaalde optelling. - Registreert andere gevallen die aan de regel voldoen (vermoeden) of breidt het patroon uit door gebruik te maken van de regel.	- Probeert te verifiëren door gevallen te testen of de betekenis van een vermoeden uit te leggen aan de hand van één voorbeeld. - Fouten en inconsistenties opsporen en corrigeren met behulp van materiaal, schema's en informele schriftelijke methoden. - Uitgangspunten in een logisch argument zijn correct en worden door de klas aanvaard.
-------------------	---	---	---

5. Afsluitende opmerkingen

In deel I van het Lesson Study handboek hebben we geprobeerd jou als leraar te ondersteunen bij het ontwikkelen van kennis over hoe jouw lesvoorbereidingen en handelingen in de klas het wiskundig redeneren van je leerlingen kunnen bevorderen. In deel

II wordt het Lesson Study-project over wiskundig redeneren bij leerlingen toegelicht, dat wil zeggen we leggen uit hoe je samen met je collega's kunt werken aan het verbeteren van het wiskundig redeneren van jouw leerlingen.

Research Lesson Study

02

1. Inleiding

In het tweede deel van het handboek richten we ons op Research Lesson Study. Eerst wordt een inleiding gegeven op de methode van Research Lesson Study. Daarna worden de verschillende stappen van Research Lesson Study toegelicht,

inclusief praktische tips en voorbeelden. Door de tekst heen wordt verwezen naar formulieren die in bepaalde fasen gebruikt moeten worden. De lege formulieren zijn te vinden aan het eind van deze handleiding.



1.1 Wat is Research Lesson Study?

Research Lesson Study is een zeer specifieke vorm van collaboratief actieonderzoek in de klas, dat focust op ontwikkeling op het vlak van het leerproces, het lesgeven en de leerinhoud³⁹. Het is een methode waarbij leraren in team als onderzoekers in de eigen klaspraktijk aan de slag gaan. Zij testen de gangbare praktijk, zoeken en overwegen alternatieven of vernieuwingen en doen onderzoek naar het leerproces van hun leerlingen waardoor ze hun lesaanpak kunnen bijstellen en verbeteren. De leraren vormen hechte leergemeenschappen en voeren daarbij gezamenlijk onderzoek uit. Deelnemen aan onderzoek met het oog op het verbeteren van het onderwijs- en leerproces is een zeer impactvolle actie die een leraar kan ondernemen⁴⁰.

Een Research Lesson Study bevat de volgende essentiële kenmerken.

- De focus ligt op de onderwijsbehoeften van de leerlingen. Die behoeften vormen het uitgangspunt van de Research Lesson Study. De handelingen, de inzet en het leerproces van de leerlingen worden geobserveerd tijdens een onderzoeksles.
- In een Research Lesson Study-groep nemen leraren de rol van praktijkonderzoekers op zich. Samen analyseren ze hun lesaanpak en de resultaten van de leerlingen en ze onderzoeken alternatieve benaderingen. De leraren formuleren een onderzoeksvraag over hoe hun lesaanpak kan worden verbeterd en hoe dat kan bijdragen aan het leerproces van hun leerlingen en aan hun eigen professionele kennis. De onderzoeksvraag stuurt de activiteiten in de verschillende fasen van een Research Lesson Study-cyclus.
- Een Research Lesson Study is een leerproces met verschillende activiteiten dat leraren mee vormgeven. Het gaat niet om het ontwerpen van de ideale les, maar om het verbeteren van de lesaanpak door (geïnformeerde) veranderingen in de praktijk uit te testen en te bestuderen hoe deze het leerproces van leerlingen beïnvloeden. Nadien kunnen leraren de opgedane kennis verankeren in hun lessen en met anderen delen.
- Leraren maken een reeks autonome beslissingen wanneer ze een Research Lesson Study ontwerpen (ze kiezen een onderzoeksfocus, selecteren de caseleerlingen, bepalen welke data te verzamelen, etc.). Dat zorgt ervoor dat de leraren controle hebben over de acties en het leerproces dat ze opstarten.



³⁹Lewis (2009)

⁴⁰Robinson et al (2009)

1.2 Waarom een Research Lesson Study uitvoeren?

Lesson Study werd ontwikkeld in Japan tussen 1870 en 1880. Pas na de publicatie van 'The Teaching Gap' in 1999⁴¹ werd de methode ook in het Westen toegepast. In deze publicatie werden de uitstekende prestaties van Japanse leerlingen (in vergelijking met Amerikaanse en Duitse leerlingen) op het gebied van wiskunde en natuurwetenschappen toegeschreven aan de praktijk van Lesson Study. Sindsdien raakten Lesson Studies om het onderwijs- en leerproces te verbeteren wereldwijd verspreid. Er is veel empirisch onderzoek gedaan naar Research Lesson Study, zowel in Azië als in Amerika en Europa. Enkele relevante overzichtsstudies, waarin inzichten uit eerder onderzoek zijn samengebracht, wijzen op positieve resultaten, zowel voor het leerproces van leraren als van leerlingen⁴². Onderzoek heeft bijvoorbeeld aangetoond dat Research Lesson Study bijdraagt aan de vakkennis, de vaardigheden, de lesaanpak en de overtuigingen van leraren⁴³. Bovendien toont onderzoek aan dat Research Lesson Study leraren gevoeliger maakt voor de onderwijsbehoeften van leerlingen, wat leidt tot grotere leerwinsten voor leerlingen⁴⁴. Ook is herhaaldelijk gebleken dat Research Lesson Study bijdraagt aan een positieve samenwerking tussen leraren, dat het hun leerproces bevordert en de ontwikkeling van een professionele leergemeenschap stimuleert⁴⁵.

Omdat leraren vaak alleen voor de klas staan, krijgen ze zelden de kans om de praktijk van anderen te zien. Wanneer de lessen van een leraar door een collega worden geobserveerd, gebeurt dit eerder in de context van een beoordeling dan in de context van professioneel leren. Daardoor zijn leraren minder geneigd om risico's te nemen. Research Lesson Study creëert echter een veilige ruimte waar leraren samen risico's kunnen nemen en onbevreesd kunnen werken aan onderdelen van het leerplan waarin zij zich minder zeker of veilig voelen. Een samenwerkingsprotocol (zie een voorbeeld pagina 65) creëert een veilige omgeving om samen te leren, waarbij leden van Research Lesson Study-groepen vlot samen onderwijsproblemen kunnen oplossen met behulp van 'exploratory talk' en 'meaning-oriented learning'. Exploratory talk is een specifieke vorm van gesprekken voeren die leraren toelaat om samen hardop te denken, zodat anderen gedeeltelijk gevormde ideeën kunnen horen, verkennen en erop voortbouwen⁴⁶. Door hun deelname aan Lesson Study leren leraren ook hoe ze 'betekenisgericht' (meaning oriented) kunnen leren. Die manier van leren stimuleert hen niet alleen om te onderzoeken "wat werkt", maar ook "waarom en hoe het werkt". Zo beginnen leraren het werk van verschillende leerlingen te vergelijken, denken ze na over hoe verschillende lessen zich tot elkaar verhouden, monitoren ze de vooruitgang van de leerlingen, experimenteren ze met nieuwe manieren van lesgeven, proberen ze te begrijpen hoe en waarom leerlingen leren en reflecteren ze over hun eigen manier van lesgeven. Het is een diepgaande manier van leren. We sommen enkele kenmerken op die verklaren waarom Research Lesson Study een positieve impact heeft op het leren van leerlingen en leraren: de sterke focus op het begrijpen van het leerproces van leerlingen, het zoeken naar verklaringen voor de misverstanden van leerlingen, de hoge mate van controle die leraren ervaren over hun eigen leerproces en een gelijktijdige focus op vakkennis, onderwijzen en het leerproces van leerlingen. Betekenis gericht leren is dus een krachtige vorm van leren die leraren in staat stelt het leerproces van hun leerlingen in grotere mate te verbeteren⁴⁷.

Research Lesson Study helpt leraren om:

- het leerproces van leerlingen nauwkeurig te observeren;
- het verschil te onderzoeken tussen wat ze verwachten dat er gebeurt bij leerlingen en wat er werkelijk gebeurt;
- te begrijpen hoe ze hun lessen beter kunnen ontwerpen en uitvoeren in overeenstemming met de behoeften die de leerlingen hebben;
- risico's te nemen binnen een ondersteunende leraar-leergemeenschap die zich inzet om een veilige ruimte te bieden en waarin elke leraar zich gewaardeerd voelt door zijn/haar Research Lesson Study groep;
- te onderzoeken hoe ze hun leerlingen kunnen helpen om beter te leren en te presteren;
- vervolgens de vakinhoud en onderwijspraktijk aan te passen om het leren beter te ondersteunen;
- hun ervaringen te delen en nieuwe kennis te maximaliseren door ervaren leraren en nieuwere collega's samen te laten werken.

1.3 Waarom specifieke caseleerlingen selecteren?

Een belangrijk element van de Research Lesson Study is het selecteren van een drietal caseleerlingen. Die leerlingen kunnen verschillende groepen leerlingen in de klas vertegenwoordigen. Als het doel van de onderzoeksles is om een nieuwe aanpak te ontwikkelen (bv. om redeneren met algebraïsche structuren uit te leggen aan leerlingen van het tweede middelbaar), dan kunnen de caseleerlingen (i) leerlingen vertegenwoordigen waarvan de leraren verwachten dat ze dit gemakkelijk zullen vinden, (ii) leerlingen waarvan de leraren denken dat ze extra ondersteuning en meer uitleg nodig hebben en (iii) leerlingen die tussen de groepen (i) en (ii) vallen. Indien de Research Lesson Study echter gericht is op een bepaalde groep leerlingen, bijvoorbeeld met specifieke onderwijsbehoeften, dan zullen de caseleerlingen uit die groep worden gekozen. De Research Lesson Study-groep zal de les ontwerpen met deze specifieke leerlingen in gedachten. Telkens wanneer zij een punt in het lesplan bereiken waar de leerlingen een opdracht moeten voltooien voordat zij naar de volgende fase van de les gaan, moeten de leraren afspreken en op hun plan noteren wat zij van elke caseleerling verwachten dat hij of zij zegt, schrijft of tekent. Het is voor de leraren een teken dat de caseleerling klaar is om naar de volgende lesfase over te gaan⁴⁸.

⁴¹Stigler & Hiebert (1999)

⁴²Cheung & Wong (2014); Seleznyov (2019); Willems & Van den Bossche (2019); Xu & Pedder (2015),

⁴³E.g. Lawrence & Chong (2010).

⁴⁴The study by Ylonen & Norwich (2013), for example, demonstrates this.

⁴⁵Stigler & Hiebert (2016); Vermunt et al. (2019)

⁴⁶Mercer & Dawes (2008).; Barnes (2008)

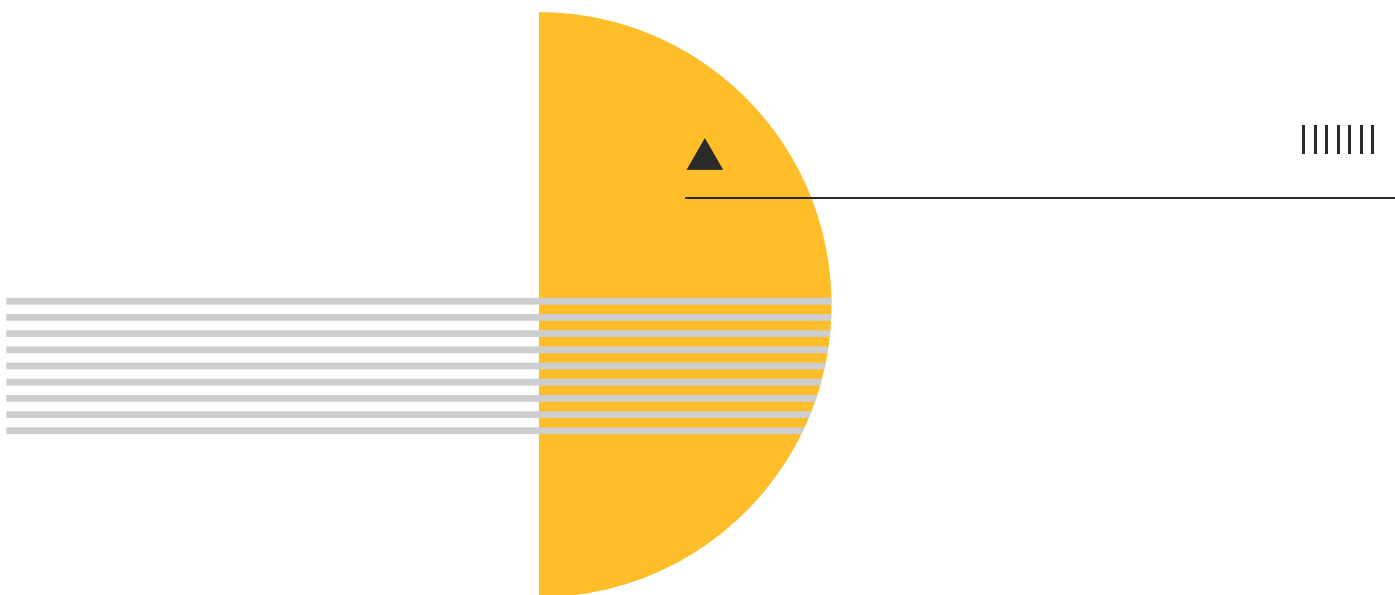
⁴⁷Vermunt, et al. (2019); Dudley, et al. (2019)

⁴⁸Dudley, (2019b)

1.4 Hoe organiseer je een Research Lesson Study?

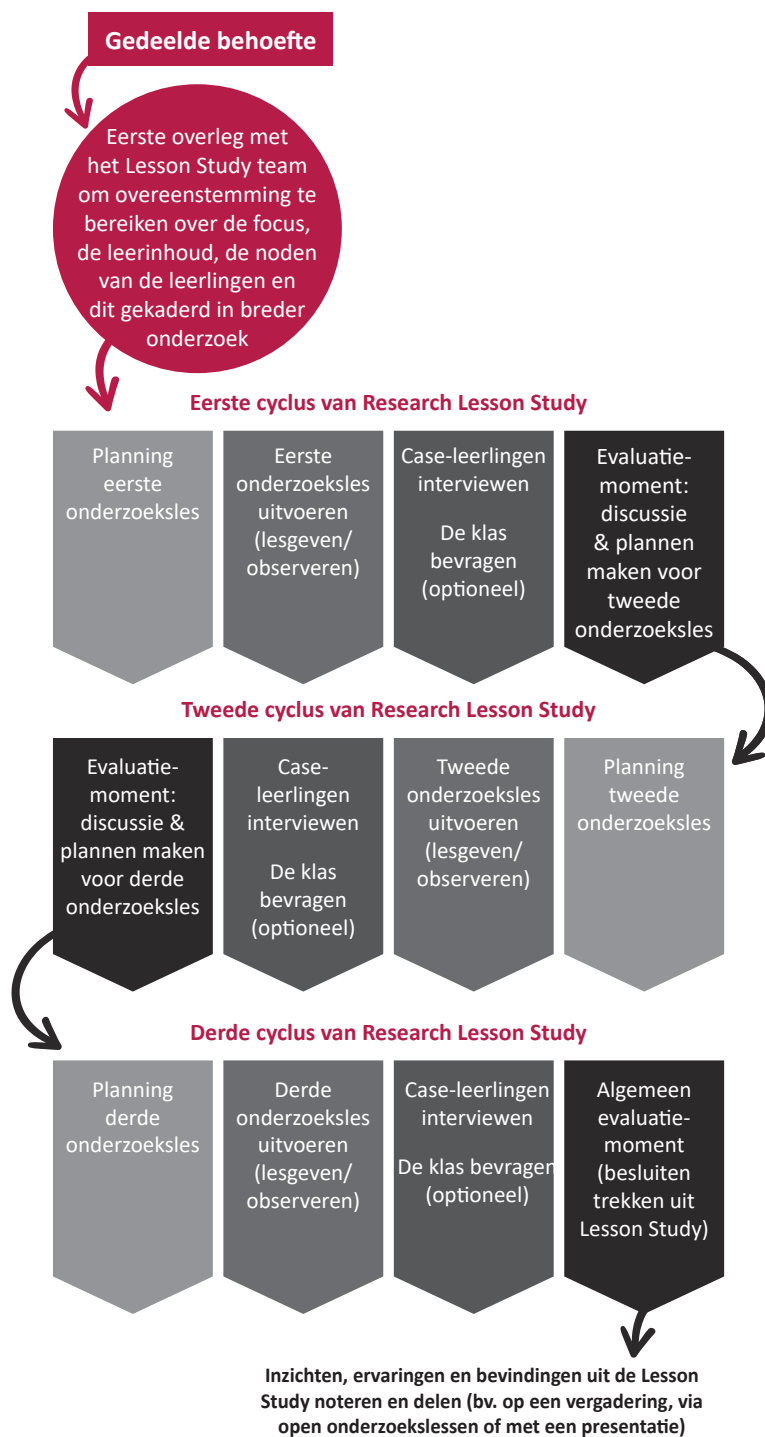
Research Lesson Study bestaat over het algemeen uit drie opeenvolgende cycli van gezamenlijk onderzoek in de klas, waarbij elke cyclus bestaat uit een onderzoeksles (zie Figuur 1). Tijdens een Research Lesson Study cyclus doet een groep leraren (meestal twee of drie deelnemers) het volgende:

- Ze gebruiken dagelijkse en periodieke evaluaties en gegevens om een onderzoeksfocus af te spreken over het leerproces en de vooruitgang van de leerlingen.
- Ze bedenken een onderzoeksvraag op basis van een onderwijsbehoefte uit de les en bestuderen en bekritisieren daarna gezamenlijk hun lesmateriaal om de focus te verfijnen en benaderingen te identificeren die een antwoord bieden op hun onderzoeksvraag.
- Ze identificeren drie “caseleerlingen”. Elk van hen kan een groep leerlingen in de klas vertegenwoordigen met betrekking tot de gekozen focus.
- Ze plannen samen meestal drie “onderzoekslessen” waarin ze een onderwijspraktijk ontwikkelen en de effecten van deze nieuwe aanpak nauwgezet bestuderen, zonder de drie caseleerlingen uit het oog te verliezen. De tweede en derde onderzoeksles wordt pas in detail gepland na de bespreking en analyse van de vorige onderzoeksles - vaak in dezelfde vergadering.
- Ze geven les en observeren samen de onderzoeksles, waarbij ze focussen op het leerproces en de vooruitgang van de caseleerlingen.
- Ze interviewen de caseleerlingen om hun inzichten in de onderzoeksles te verkrijgen.
- Ze nemen een korte vragenlijst af bij alle leerlingen (optioneel).
- Ze houden na elke onderzoeksles een nabespreking waarin wordt geanalyseerd hoe de caseleerlingen hebben gereageerd, welke vooruitgang ze hebben geboekt, welke bewijzen van leren of van moeilijkheden ze hebben getoond en hoe de onderwijs- of leeraanpak de volgende keer verder kan worden ontwikkeld.
- Na de laatste onderzoeksles bespreken ze welke kennis ze tijdens het hele onderzoek hebben opgedaan en hoe de vakinhoud en lesaanpak daardoor zal veranderen.
- Ze delen de resultaten formeel met een breder publiek van andere leraren - in een presentatie, via een demonstratie of door coaching.



Figuur 1 toont het proces van een Research Lesson Study. De eerste fase in de cirkel is de initiële studiefase waarin de Research Lesson Study-groep de focus voor het onderzoek, het onderzoeksdoel en de onderzoeksvragen bepaalt. Elke horizontale lijn is een cyclus van de Research Lesson Study. Research Lesson Study houdt niet op na slechts één onderzoeksles. Wat er in de eerste onderzoeksles vaak gebeurt, is dat leraren veel duidelijker verschillen gaan zien tussen wat de leraren verwachten van de caseleerlingen en wat de caseleerlingen effectief doen. Dat stelt de groep in staat een tweede les te ontwerpen waarin de lesaanpak beter past bij de behoeften van leerlingen. In onderzoeksles drie worden alle resterende problemen aangepakt en worden ook succesvolle aspecten van onderzoeksles twee bijgesteld en aangescherpt om ze verder te testen. In dit stadium heeft de overgrote meerderheid van de Research Lesson Study-groepen iets ontwikkeld dat in hun toekomstige lessen zal worden opgenomen, wat ook met anderen kan worden gedeeld.

Onderzoeksles twee en drie zijn geen aangepaste herhalingen van onderzoeksles één. Het zijn verschillende lessen in een langere reeks. Over het algemeen gebruiken de leraren in een reeks onderzoekslessen dezelfde klas om een leeraspect (zoals een competentie of vaardigheid) uit te testen die de klas moet worden bijgebracht. Onderzoeksles twee en drie werken dit aspect dus telkens verder uit. Je kan bijvoorbeeld een vaardigheid in onderzoeksles één introduceren en het in onderzoekslessen twee en drie verder uitwerken en/of uitdiepen. Het is het beste om dit in een periode van ongeveer drie weken uit te voeren.



Figuur 1.
Het Research Lesson Study-proces⁴⁹

⁴⁹Based on Dudley, 2019a

1.5 Voorwaarden om met Research Lesson Study te beginnen

Voordat men begint aan een Research Lesson Study, is het raadzaam na te gaan of er aan een aantal voorwaarden op schoolniveau wordt voldaan. Als dit het geval is, is de kans op succes groter.

- **Steun van de directie**
De kans op succes neemt toe als Lesson Study is ingebed in het schoolsysteem. De directie kan Research Lesson Study faciliteren door een Lesson Study-groep tijd en ruimte te geven om de gebruikte materialen en benaderingen zorgvuldig te analyseren, het werk van leerlingen te onderzoeken en nieuwe benaderingen te identificeren of gezamenlijk te ontwikkelen. Het is ook motiverend voor een Research Lesson Study-groep als de directie het belang van Lesson Study voor de hele school benadrukt, de leraren aanmoedigt om te experimenteren, het proces opvolgt en de groepsleden tijd en ruimte geeft om hun bevindingen te delen met hun collega's.
- **Beschikbare tijd voor Research Lesson Study**
Leraren moeten zelf tijd investeren in Research Lesson Study. Een Research Lesson Study richt zich op het leerproces en ontleent zijn leerwinst aan het bijsturen van dat proces, wat tijd kost. Ook is het belangrijk dat leraren structureel tijd krijgen om in de klas met elkaar te overleggen en elkaar te observeren. Het is meestal de directie die de puzzel van de lessenroosters van de leraren moet leggen.
- **Openheid en veiligheid**
Van leraren die deelnemen aan een Research Lesson Study wordt een open houding verwacht: ze staan open voor het verbeteren van de praktijk in de klas en zijn bereid de deuren van de klas open te zetten voor collega's. Het samenstellen van een Research Lesson Study-groep waarin één persoon zich als de 'expert' presenteert, werkt meestal niet. Een veilig (leer)klimaat is noodzakelijk. Het is belangrijk dat iedereen elkaar respecteert en dat alle bijdragen gewaardeerd worden. Het is van groot belang dat leraren ideeën, bezorgdheden, uitdagingen en 'verwonderingen' kunnen delen zonder angst voor kritiek. Zij moeten elkaar als "kritische vrienden" behandelen. Deze manier van praten en discussiëren leidt tot productievere gesprekken⁵⁰.
- **Realistische doelen stellen**
en Research Lesson Study vertrekt altijd vanuit een bepaalde behoefte die leraren ervaren en die leidt tot een onderzoeksdoel. Het kan gaan om een probleem in de klas (bijv. "Mijn leerlingen hebben moeite met het herkennen van een patroon in de wiskundeles.") of om de behoefte om te innoveren in het onderwijs (bijv. "Er komt een nieuw leerplan voor wiskunde, hoe moeten we daarmee omgaan in onze klaspraktijk?"). Het is belangrijk dat de behoefte wordt besproken met collega's en de directie om de relevantie en haalbaarheid ervan te garanderen. De behoefte bepaalt vervolgens de inhoudelijke focus van de Research Lesson Study (bijv. redeneren en bewijzen, zie deel I). Tijdens een Research Lesson Study zorgt de inhoudelijke focus voor een duidelijke richting en gedeelde doelen binnen de Research Lesson Study-groep. Het is aan de groep om informatie te verzamelen over het gekozen thema. Dat kan via literatuur en online video's, maar de groep kan er ook voor kiezen om extra input te krijgen van een deskundige of een andere goed geïnformeerde persoon (bijvoorbeeld door een lezing bij te wonen, een workshop te volgen of een deskundige of een ervaren leraar op school uit te nodigen).
- **Begeleiding**
Het is aan te bevelen dat een Research Lesson Study-groep die nog niet vertrouwd is met deze methode, een bepaalde vorm van begeleiding krijgt. Bij LESSAM bieden wij de begeleiding die nodig is voor een succesvolle Research Lesson Study.

⁵⁰Edwards and Mercer (1987)

2. Research Lesson Study opstarten

2.1 Een gedeelde behoefte

Een Research Lesson Study start altijd vanuit een gedeelde behoefte die leraren ervaren. In dit project zullen we ons richten op wiskundig redeneren. Om deze behoefte verder te definiëren, moet je nadenken over wat je wilt veranderen en voor wie. De wat-vraag ligt op het brede terrein van leereinhouden, didactische maatregelen, leer- of onderwijspraktijken, evaluatie, gebruik van onderwijstechnologie of specifieke vormen van ondersteuning. Daarnaast is het belangrijk om na te gaan voor wie deze behoefte geldt. Gaat het om de hele klas of om een bepaalde groep leerlingen? Bijvoorbeeld zeer vaardige leerlingen of leerlingen die niet gemotiveerd zijn of niet zo goed leren of presteren als je zou verwachten. Bedenk ook waarom je iets wilt veranderen.

Door de focus te leggen op het “wat”, “voor wie” en “waarom”, zal het doel van een Research Lesson Study duidelijker worden. Hoe specifieker je ze beschrijft, hoe gemakkelijker het is om deze gedeelde behoefte om te zetten in een onderzoeksdoel en onderzoeksvraag.

Het is heel belangrijk om met andere collega's van gedachten te wisselen over de “behoeften” die zij ervaren tijdens de les. Op die manier krijg je een beter idee van wat haalbaar is om samen aan te pakken in jullie klascontext.



Lerarentaak

In hoeverre is wiskundig redeneren belangrijk voor leerlingen? Leg uit en bespreek met je collega's. Je kunt hoofdstuk 1 als inspiratiebron gebruiken.

Probeer aan te geven waarom je het wiskundig redeneren in je klaslokalen wilt optimaliseren. De volgende vragen kunnen nuttig zijn voor de discussie:

- Wat wil je veranderen of onderzoeken met betrekking tot wiskundig redeneren?
- Voor wie wil je dit veranderen?
- Waarom is dit belangrijk of interessant?

2.2 Het vormen van een Research Lesson Study-groep

Als je met Research Lesson Study begint, is het raadzaam om met een kleine groep van twee tot drie leraren te beginnen^{51 52}. Een Research Lesson Study-groep kan bestaan uit leraren die in parallelle klassen werken, maar het is ook mogelijk om over de jaren heen te werken. Het is aan te bevelen dat een Research Lesson Study-groep bestaat uit leraren van hetzelfde of een verwant vakgebied, zodat ze samen lessen kunnen ontwerpen.

De volgende stap is nadenken over de manier van samenwerken en de bijbehorende verwachtingen. Formuleer als groep jullie verwachtingen over de samenwerking. De volgende vragen kunnen daarbij helpen: Wat verwachten jullie van de samenwerking? Wanneer is de samenwerking voor jullie een succes? Welke obstakels kunnen jullie tegenkomen bij de samenwerking en hoe gaan jullie daarmee om? Hoe zullen jullie reageren bij een meningsverschil? Het kan nuttig zijn om een **Formulier Samenwerkingsprotocol** op te stellen (zie ook onderstaand voorbeeld).

⁵¹When two teachers collaborate, the overall management of the lesson study can be easier but with three teachers, the quality and quantity of learning will increase. This is because when three people are involved, teachers can 'interthink' through exploratory talk. There are more opportunities within the discussion for reflection and development of

ideas – because it is not always your turn to speak next – someone can grasp a glimmer of an idea which has flashed past the back of their mind while the other two talk and develop it before introducing it to the others – which it is much harder to do with only two interlocutors.

⁵²Bodvin et al. (2020)



Een voorbeeld van een samenwerkingsprotocol voor Research Lesson Study⁵³

Dit protocol werd ontwikkeld om gemeenschappelijke verwachtingen te scheppen bij de leden van de Research Lesson Study-groep. Een dergelijk protocol helpt de groep om een goede werkwijze te vormen die de leden helpt om ideeën, bezorgdheden, uitdagingen en 'verwonderingen' te delen zonder angst voor kritiek. Het vormt een belangrijke set basisregels voor gesprekken, die de groep aanzet om 'exploratory talk' te gebruiken, wat het betekenis gericht leren⁵⁴ en het ontdekken en delen van nieuwe praktijkkennis bevordert.

Gedurende de volledige Lesson Study zullen we ons gedragen als volgt:

- We zijn als lerenden gelijkwaardig, ongeacht leeftijd, ervaring, expertise of anciënniteit op school (of daarbuiten).
- Alle bijdragen aan het gesprek worden met onvoorwaardelijke positieve waardering behandeld. Dit betekent niet dat ze niet worden geanalyseerd, betwijfeld of uitgedaagd, maar wel dat niemand zich dom zal voelen omdat hij of zij een suggestie heeft gedaan. Het zijn vaak de suggesties waarbij je je dom of kwetsbaar voelt die de grootste waarde hebben en waaruit je het meest kan leren.
- Wij zullen diegene(n) steunen die de onderzoeksles(sen) geeft/geven, de lessen nauwkeurig observeren en zoveel mogelijk noteren wat de leerlingen zeggen en doen.
- We zullen de gebruikelijke hulpmiddelen hanteren voor de Research Lesson Study, bv. planners en formulieren om de data te verzamelen en om de resultaten met elkaar te delen.
- We zullen het werk van de leerlingen en de opmerkingen in de interviews gebruiken voor de nabespreking van de les, naast onze observaties.
- We gebruiken het Formulier Nabespreking de om te bespreken van wat elke leerling deed in vergelijking met wat we verwachtten en laten de discussie van daaruit vertrekken.
- We zullen naar elkaar en naar onszelf luisteren als we spreken en op de discussie voortbouwen, suggesties doen, hypothesen opperen, uitweiden en telkens informatie toetsen aan onze lesdoelen, onze caseleerlingen en onze observatie- en andere gegevens uit de onderzoeksles.
- We zullen wat we leren - onze nieuwe praktijkkennis - met onze collega's delen, zo nauwkeurig en levendig als we kunnen en op zo'n manier dat zij het zelf kunnen uitproberen.
- We zullen de doelstellingen en resultaten van onze Research Lesson Study op gepaste wijze met onze leerlingen delen, afhankelijk van hun leeftijd en ontwikkelingsstadium. Hun opvattingen, ideeën en perspectieven zullen met dezelfde positieve waardering worden behandeld.

Datum en handtekening van alle groepsleden.

⁵³Dudley (2019a)

⁵⁴Vermunt et al. 2019

2.3 Praktische organisatie

Onderzoekslessen hebben tijd en ruimte nodig om succesvol te zijn. Het is het beste om op voorhand na te denken over de praktische organisatie van Research Lesson Study. Spreek af wanneer en in welke ruimte de groep samenkomt, wie de bespreking leidt en wie de nodige aantekeningen maakt (deze rollen kunnen wisselen per bijeenkomst), hoe lang de bijeenkomst duurt enzovoort. Afspraken kunnen van vergadering tot vergadering veranderen, maar vooraf afspraken maken kan veel misverstanden voorkomen. Je hebt tijd nodig (minstens een uur) om de eerste onderzoeksles te plannen. Zorg ook dat er tijd is voor een nabespreking direct of kort na het uitvoeren van de onderzoeksles. Maak deze bespreking lang genoeg, zodat je ook aan de planning van de volgende onderzoeksles kan beginnen. Gebruik het **Formulier Overzichtstabel**.



Het is belangrijk om te beslissen wanneer het team samen de onderzoekslessen zal plannen, doceren en erover reflecteren. Hieronder delen we een goed voorbeeld van een jaarplanning voor twee lessen:

September-oktober: kennismaking met Lesson Study (lees handleiding, indien mogelijk: workshops volgen)

Oktober-november: onderzoeksvraag formuleren en onderzoekslesplan uitwerken

November-december: eerste Lesson Study (3 onderzoekslessen + reflecties)

Januari-februari: algemene evaluatie, uitwisseling van ideeën met andere lerarenteams

Februari-maart: tweede onderzoeksvraag formuleren en onderzoekslesplan uitwerken

Maart-april: tweede Lesson Study (3 onderzoekslessen + reflecties)

April-mei: algemene beoordeling, desiminatie van de resultaten

- • • • • • •
- • • • • • •
- • • • • • •

Voorbeeld van een dagplanning:

	Leraar A	Leraar B	Leraar C*
Maandag: lesuur 2	Onderzoeksles 1 geven	Onderzoeksles 1 observeren	Onderzoeksles 1 observeren
Maandag: pauze		Interviewen caseleerling	
Maandag: lesuur 4	Onderzoeksles 1 observeren	Onderzoeksles 1 geven	Onderzoeksles 1 observeren
Maandag: middagpauze			Interviewen caseleerling
Maandag: lesuur 5	Evaluatie van de onderzoeksles	Evaluatie van de onderzoeksles	Evaluatie van de onderzoeksles

* Dit voorbeeld geldt voor als de Research Lesson Study-groep uit drie leraren bestaat. Als de Research Lesson Study-groep uit twee leraren bestaat, interviewt leraar A in dit voorbeeld de caseleerlingen tijdens de lunchpauze op maandag.

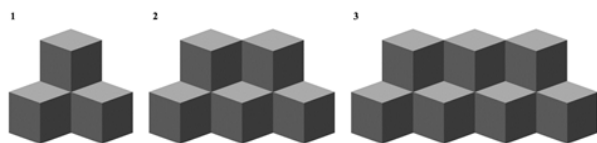
3. Een onderzoeksdoel bepalen en caseleerlingen selecteren

3.1 Een onderzoeksdoel formuleren en caseleerlingen selecteren

Het bepalen van een onderzoeksdoel en het selecteren van caseleerlingen gaan hand in hand. Kies drie leerlingen die (a) verschillende groepen leerlingen in de klas kunnen vertegenwoordigen - bijvoorbeeld leerlingen die goede, gemiddelde of minder dan gemiddelde vooruitgang boeken op het leergebied van de onderzoeksles of op een leergebiedoverschrijdende vaardigheid zoals academisch schrijven, of (b) leerlingen die niet zo goed leren of zich niet zo goed inzetten als je had gehoopt op het leergebied van de onderzoeksles. Denk na over de behoeften van deze caseleerlingen in verband met je lesaanpak en beslis wat het algemene doel en de focus van de onderzoekslessen zullen zijn. Noteer dit in het **Formulier Overzichtstabel**. Denk aan een extra caseleerling voor het geval een leerling afwezig is op de dag van de onderzoeksles.



Voorbeeld van een onderzoeksdoel voor wiskundig redeneren⁵⁵. We willen dat leerlingen in staat zijn een patroon te veralgemeniseren tot een symbolische uitdrukking, met gebruik van variabelen. Bijvoorbeeld :



- Hoeveel kubussen heb je nodig voor het vierde, vijfde, zesde patroon?
- Zoek het aantal kubussen voor het 18e, 64e en 911e patroon.
- Leg uit hoe je het aantal kubussen kunt vinden voor een willekeurig patroon in de reeks.

We zijn vooral geïnteresseerd in leerlingen die moeite hebben met het opstellen/ontwerpen van rekenkundige uitdrukkingen (en ondersteund zouden kunnen worden met een tabelvoorstelling). Of in leerlingen die over het algemeen gericht zijn op het uitvoeren van procedures zonder verder na te denken en moeilijk te motiveren zijn om wiskundig te denken.

3.2. Het formuleren van een onderzoeksvraag

Een onderzoeksvraag vertrekt vanuit de behoeften van de caseleerlingen of de behoeften die de Research Lesson Study-groep ervaart tijdens het lesgeven aan de caseleerlingen. Om een beter beeld te krijgen van die behoeften, kan je meer informatie inwinnen uit andere bronnen. Enkele suggesties:

- Analyseer de schoolresultaten van de caseleerlingen voor wiskunde. Zijn er bepaalde delen waarop een leerling lager scoort? Is dat te wijten aan een gebrek aan kennis, vaardigheden of attitude?
- Praat met leraren van vorig jaar: hoe hebben zij de caseleerlingen in de klas ervaren?
- Plan gesprekken in met de caseleerlingen en vraag wat er wel en niet goed gaat bij wiskunde. Ga na wat de caseleerlingen op dit moment van de lessen vinden en wat ze zouden willen veranderen.



⁵⁵Pattern Sequence task (based on Weigand, Schüler-Meyer & Pinkernell, 2021).



Lerarentaak:

Probeer de behoeften van je caseleerlingen op het gebied van wiskundig redeneren te specificeren. Wat zijn bijvoorbeeld de moeilijkheden die leerlingen ondervinden wanneer hen gevraagd wordt om na te denken over algebraïsche patronen?

Begin met één taak en analyseer het soort redeneren dat je van je (casus)leerlingen verwacht.

Probeer expliciet op te merken hoe je (casus)leerlingen redeneren in deze taak. Vergelijk dat met je planning.

De leerlingen kunnen verschillende behoeften tegelijk hebben. In dat geval zullen de Research Lesson Study-groepsleden moeten kiezen voor één (leer)behoefte waarop zij zich willen richten. Spreek af op welk niveau elke leerling zich bevindt binnen het leergebied van de onderzoeksles - bijvoorbeeld leerlingen die presteren onder de verwachtingen, zoals verwacht, of boven de verwachtingen met betrekking tot een specifiek onderwerp of inhoudsgebied.

Figuur 2 illustreert hoe leraren de inzichten die ze hebben kunnen samenbrengen: de leerinhoud en de materialen, de lesaanpak, de analyse van het leerproces en de behoeften van de leerlingen. Dit is de basis van je onderzoeksdoel en onderzoeksvraag. Bedenk welke leerdoelen je voor de leerlingen hebt voor elke onderzoeksles en noteer ze in het **Formulier Overzichtstabel**.



Figuur 2

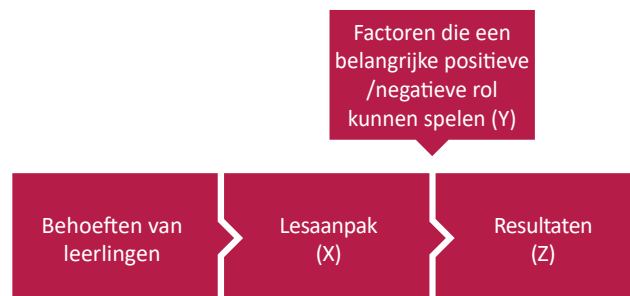
Inzichten samenbrengen om het onderzoeksdoel te bepalen.

Je kan kiezen tussen twee soorten onderzoeksvragen: verkennende onderzoeksvragen en verklarende onderzoeksvragen.

Verkennde onderzoeksvragen worden gebruikt om bepaalde hypothesen te genereren, bijvoorbeeld wanneer je denkt dat leerlingen baat hebben bij samenwerking: "Leren vaardige leerlingen meer wanneer ze in homogene groepen werken?". Verder kunnen verkennende onderzoeksvragen worden gebruikt om te observeren zonder sterke veronderstellingen of vooraf bepaalde ideeën, zoals: "Waarom heeft homogene groepsvorming een effect op de motivatie van minder vaardige leerlingen?"

Verklarende onderzoeksvragen proberen te verklaren waarom bepaalde fenomenen werken op de manier waarop ze verwacht worden te werken. Ze kunnen gebaseerd zijn op theoretische inzichten, maar ook op expertise die is opgebouwd op basis van jarenlange onderwijservaring. In dit geval kan het interessant zijn om een bredere onderzoeksvraag nadien te concretiseren, om ze haalbaar te maken. Dat kan aan de hand van het XYZ-schema (zie Figuur 3 hieronder).

De Z staat voor de uitkomst die je met de caseleerlingen wilt bereiken, de X voor de lesaanpak die je wilt inzetten om die uitkomst te bereiken en de Y voor modererende factoren die daarbij een rol kunnen spelen, zoals voorkennis, vaardigheid met algebraïsche patronen, voorkeur voor abstract redeneren. Dit zijn factoren die verklaren dat lesaanpak X in de ene situatie wel werkt en in de andere niet. Probeer zo mogelijk Y-factoren te onderscheiden die je kan beïnvloeden of waarmee je rekening moet houden. Het is belangrijk bij het ontwerpen van lesaanpak X gericht op gewenste uitkomsten Z, dat je rekening houdt met de Y-factoren die deze relatie kunnen beïnvloeden. Wanneer je nadenkt over de mogelijke invloed van de Y-factoren, moet je nagaan of deze invloed de verwezenlijking van Z (het resultaat) niet volledig verhindert. Het is dus belangrijk om bij het schrijven van een onderzoeksvraag realistische doelen voor ogen te houden in de gegeven klascontext en voor de geselecteerde caseleerlingen.



Figuur 3

XYZ-schema om een onderzoeksvraag te formuleren⁵⁶

Ga na of alle termen of begrippen die in het XYZ-schema worden gebruikt duidelijk zijn. Bedenk bij elk begrip of concept hoe dit tot uitdrukking kan komen in waarneembaar gedrag van leerlingen en/of hoe je een leerling hierover kunt bevragen. Deze denkoefening helpt om de verklarende onderzoeksvraag voldoende concreet te formuleren. Daarnaast komen de gebruikte concepten van pas bij de voorbereiding van de observatie en het interview (zie ook sectie 5 en 6). Een of meer begrippen in de onderzoeksvraag kan je als gevolg mogelijks herschrijven. Zo is 'blijvende inzet na het afronden van de oefeningen' concreter (als formulering van de uitkomst Z) dan het bredere begrip 'motivatie'.

Wanneer we dus nadenken over de brede vraag: "Hoe kunnen we caseleerlingen meer stimuleren tijdens lessen over wiskundig redeneren?", kan dit worden begrensd als "Nagaan welk effect lesaanpak X (strategisch vragen stellen) heeft op de uitkomst Z (blijvende inzet na het maken van de oefeningen, bij het evalueren van de relevantie van een wiskundig model in een realistische situatie) bij de caseleerlingen en nagaan of eventuele andere factoren Y (bijvoorbeeld bruikbaarheid van de leerstof in het dagelijks leven) hierbij een rol spelen. In het algemeen geldt dat hoe concreter de onderzoeksvraag is, des te preciezer de observaties, de interviews, de (optionele) korte vragenlijsten en de evaluatie zullen zijn.



Voorbeelden van onderzoeksvragen over wiskundig redeneren:

- Hoe kan ik algebra onderwijzen (bijv. het verbinden van representaties)? (verkennde onderzoeksvraag)
- Hoe kan een focus op wiskundig redeneren motiverender zijn voor leerlingen? (verkennde onderzoeksvraag)
- Hoe kan ik tijdens de lessen over wiskundig redeneren op een effectieve manier inspelen op de verschillende onderwijsbehoeften van leerlingen? (verklarende onderzoeksvraag)
- In hoeverre zijn differentiërende taken en scaffolding effectieve manieren om tegemoet te komen aan de verschillende onderwijsbehoeften van leerlingen tijdens de lessen over wiskundig redeneren? (verklarende onderzoeksvraag)
- Faciliteren cognitief veeleisende taken het wiskundig redeneren? (verklarende onderzoeksvraag)

Noteer je onderzoeksvraag op het **Formulier Overzichtstabel**.

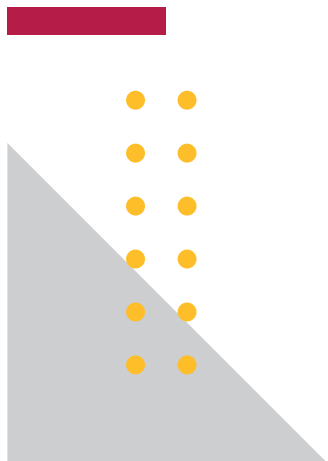
4. Planning van de eerste onderzoeksles

4.1 Wat is een onderzoeksles

Een belangrijk doel van een onderzoeksles is te onderzoeken of een bepaalde lesaanpak beter kan leiden tot een gewenst resultaat voor caseleerlingen. Het doel van de onderzoeksles is meestal om een bestaande lesaanpak te veranderen of te verbeteren, maar de onderzoeksles kan er ook op gericht zijn om in een verkennende fase zorgvuldig in kaart te brengen hoe een bestaande onderwijspraktijk het gewenste resultaat oplevert en hoe dit door de caseleerlingen wordt ervaren. Het doel is dus niet om 'de perfecte' les te ontwerpen of om zoveel mogelijk lesinhoud of onderwijspraktijken in een onderzoeksles te integreren, maar om een les zo te ontwerpen dat de vooraf bepaalde uitkomsten bij de caseleerlingen worden bereikt.

Beslis of de onderzoeksles wordt gegeven door één of meer leraren van de onderzoekslesgroep. Als meer dan één leraar de onderzoeksles geeft, denk er dan aan dat je drie caseleerlingen per klas moet selecteren. Er zijn verschillende opties mogelijk:

- **Optie 1:** elke leraar geeft dezelfde onderzoeksles; bij elke onderzoeksles is ten minste één ander groepslid aanwezig om de caseleerlingen te observeren en te interviewen;
- **Optie 2:** slechts één leraar geeft de onderzoeksles, het/de andere groepslid/-leden observeren de onderzoeksles;
- **Optie 3:** elke onderzoeksles wordt gegeven aan een andere leraar/klas. Met andere woorden: de eerste Research Lesson Study betreft één klas, de tweede Research Lesson Study betreft een andere klas en de derde Research Lesson Study betreft de derde klas.



4.2 Praktische en inhoudelijke voorbereiding van de onderzoeksles

Herzie je onderwijstaken zorgvuldig tijdens de voorbereiding. Schrijf precies op wat elke leerling aan het einde van de onderzoeksles met zijn/haar nieuwe kennis moet kunnen doen. Je kan hiervoor het **Formulier Lesplan en Observatie** gebruiken. Plan elke fase van de les met bijzondere aandacht voor de volgorde waarin je de specifieke aanpak gebruikt die je uitprobeert of verfijnt. Spreek af en noteer op je lesplan- en observatieformulier precies wat je verwacht dat elke caseleerling op dat ogenblik zal hebben geschreven, gezegd, getekend enz. dat erop wijst dat hij/zij klaar is om naar de volgende fase van de les te gaan. Bepaal zo zorgvuldig mogelijk welke hulpmiddelen je zal gebruiken en hoe, wat je waar en wanneer op het bord zal schrijven en geef de tijdstippen van de lesfasen aan.

Houd bij de voorbereiding van je les rekening met de verschillen tussen je caseleerlingen (bv. leerlingen die goede, gemiddelde of minder dan gemiddelde vooruitgang boeken met betrekking tot het gewenste resultaat). Het is echt belangrijk dat de Research Lesson Study-groep duidelijk opschrijft wat ze in de komende les van de caseleerlingen verwacht en hoe ze daarvoor bewijzen zal verzamelen.



Deel I van dit handboek bevat een inspirerende handleiding voor het onderwijzen en leren van wiskundig redeneren. De verschillende onderdelen van deel I (met inbegrip van de gegeven voorbeelden) zijn bijzonder nuttig voor het plannen van de onderzoeksles.

4.3 De observatie van de caseleerlingen voorbereiden

Na de planning van de onderzoeksles en de bespreking van wat men van elke caseleerling verwacht, is het belangrijk om voor te bereiden hoe de leerlingen zullen worden geobserveerd. Bij de observaties wordt nagegaan wat er daadwerkelijk in de klas gebeurt. Het observeren van caseleerlingen om te ontdekken hoe ze werken in de klas is een van de belangrijkste en meest onthullende aspecten van Research Lesson Study.

Het helpt om enkele regels te hebben zodat leraren niet allemaal gegevens over twee leerlingen verzamelen en de derde missen. Observeer de reserve caseleerling als er een caseleerling afwezig is op de dag van de onderzoeksles.

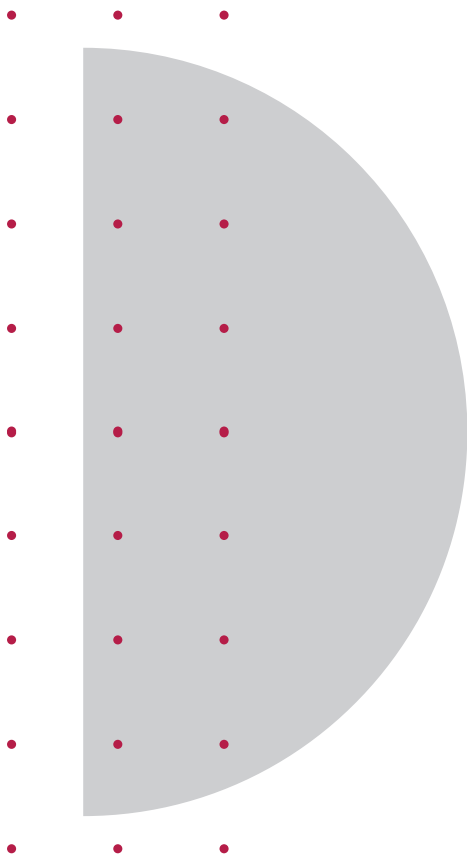
Er zijn verschillende manieren om een observatie te organiseren, variërend van een open observatie (bijv. luisteren, kijken en aantekeningen maken) tot een gesloten observatie (bijv. met behulp van een checklist) of een combinatie van open en gesloten observatie.

Als je voor een open observatie kiest, observeer dan het gedrag van de leerlingen en luister naar wat de leerlingen zeggen, noteer wat ze hebben geschreven of gezegd of getekend in vergelijking met wat van de groep werd verwacht. Maak een foto van de lesnotities van de leerlingen. Luisteren naar wat ze tegen elkaar zeggen kan helpen om te weten wat en hoe ze denken en op ideeën komen.

Een valkuil is om open observaties te doen met een vage link naar de onderzoeksvraag. Een (deels) gesloten observatie kan dan helpen. Bedenk welke gedragsindicatoren nuttig kunnen zijn om te observeren in relatie tot de onderzoeksvraag. Denk bijvoorbeeld aan relevant gedrag dat van de caseleerlingen kan worden geobserveerd, bv. als de onderzoeksvraag gaat over 'blijvende betrokkenheid bij het maken van de wiskundige oefeningen', denk dan na over hoe dat kan worden geobserveerd of wat voor soort bewijs nodig is om vast te stellen of de caseleerlingen inderdaad betrokken zijn bij het maken van de oefeningen. Welk observeerbaar gedrag verwacht je en hoe verschilt dat gedrag van het gedrag van een leerling die niet geëngageerd is? Door observaties in de klas kan je nagaan wat er werkelijk gebeurt. Gebruik het **Formulier Lesplan en Observatie** om op te schrijven welk gedrag relevant is.



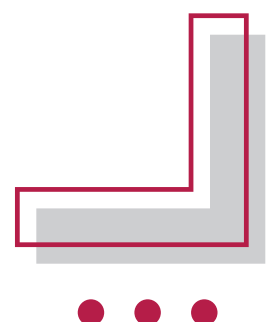
Hieronder vind je een voorbeeld van gedragsindicatoren (tabel 1 en 2) die nuttig kunnen zijn bij het observeren van caseleerlingen⁵⁷. Uiteraard zijn er nog vele andere gedragsindicatoren mogelijk. Probeer steeds een weloverwogen keuze te maken om tot een beperkt en haalbaar aantal te observeren gedragsindicatoren te komen. Hoe specifieker deze indicatoren worden geformuleerd, hoe bruikbaar de observatie zal zijn. Vermijd indicatoren die elkaar overlappen en streef ernaar indicatoren te onderscheiden die elkaar uitsluiten.



⁵⁷Based upon de Vries et al. (2016) en Kooiker (2011)

Tabel 1
Gedragsindicatoren voor wiskundig redeneren

Generaliseren vanuit specifieke gevallen (inductief redeneren)	De leerling ziet een patroon op basis van een reeks getallen. De leerling vindt het volgende getal.
Wiskundige beweringen evalueren	De leerling verzint meerdere voorbeelden en gaat na of deze de bewering bevestigen/ tegenspreken. De leerling geeft een tegenvoorbeeld dat de bewering weerlegt. De leerling geeft een algemeen voorbeeld of een geldig argument om de bewering te ondersteunen.
Conclusies trekken via deductief redeneren	De leerling gebruikt (of verwijst naar) een stelling of regel over een specifiek geval.
Redeneren via analogie (overdracht van structurele informatie van het ene systeem naar het andere)	De leerling herkent situaties die gelijkaardig genoeg zijn (met betrekking tot een relevant criterium). De leerling verwijst naar kenmerken van gelijkaardige situaties.
Redeneren met beelden	De leerling verplaatst delen van geometrische vormen om zijn/haar denkproces te rechtvaardigen. De leerling herkent gemeenschappelijke elementen in verschillende vormen (gemeenschappelijke basis, gemeenschappelijke hoogte) die zijn/haar denkproces rechtvaardigen.
De relevantie van een wiskundig model evalueren in een realistische situatie	De leerling valideert het model ('Geeft het de situatie voldoende weer?'). De leerling merkt bijvoorbeeld op dat een lineair model niet past bij de reële groei van een bacteriële populatie/de waarde van aandelen (exponentiële groei) door naar de grafieken te kijken en door hulpmiddelen zoals CAS te gebruiken.
Verbanden leggen tussen verschillende representaties (visueel, symbolisch, verbaal, contextueel, fysiek)	De leerling gebruikt termen die horen bij een andere soort representatie (bijv. in een opmerking over een symbolische representatie gebruikt hij/ze de term "punt"). De leerling beantwoordt vragen die over een bepaalde representatie zijn geformuleerd met termen of informatie uit een andere representatie. De leerling gebruikt extra representaties die niet in de opgave gegeven zijn (bijv. tabel om lineaire grafieken weer te geven).
Voorspellingen doen in situaties die te maken hebben met kansberekening	De leerling geeft aan dat/waarom een grafiek misleidend zou zijn. De leerling onderscheidt de theoretische kans van de experimentele kans en van de frequentie in een specifiek geval.



Tabel 2
Indicatoren van cognitieve vaardigheden

Kritisch denken	• De leerling generaliseert op basis van voorbeelden • De leerling generaliseert op basis van geïdentificeerde patronen • De leerling beargumenteert waarom een bepaalde voorstelling past, er een fout is, waarom een model past bij een situatie ... • De leerling vindt analogieën • De leerling bedenkt eigen opgaven of problemen, eventueel gebaseerd op enkele gegeven criteria • De leerling gebruikt heuristieken om een probleem op te lossen • De leerling bedenkt een oplossingsstrategie voor een probleem • De leerling motiveert keuzes (bijv. voor een oplossingsstrategie, een stelling)
Gebruik van representaties om betekenis te geven	• De leerling gebruikt twee of meer representaties om een probleem te onderzoeken • De leerling zet een grafische voorstelling of een tabel om in een symbolische voorstelling (een vergelijking, een term) • De leerling kiest een geschikte soort representatie • De leerling ziet hoe veranderingen in een representatie een andere representatie beïnvloeden (bijv. hoe het veranderen van de “helling” van een grafiek de symbolische uitdrukking van een functie beïnvloedt) • De leerling vervormt een representatie op een systematische manier om inzicht te krijgen in een wiskundige opgave (bijv. parameters van een kwadratische functie)
Conceptuele taken die procedures vereisen	• De leerling maakt gebruik van meerdere representaties (grafieken, tabellen, formules) om tot een resultaat te komen • De leerling gebruikt de concepten die aan een procedure ten grondslag liggen • De leerling bedenkt een procedure met hulpmiddelen (bijv. modellen, blokjes, ...) • De leerling beoordeelt de toepasbaarheid van een procedure voor een bepaald probleem • De leerling vindt een procedure voor een bepaald probleem • De leerling interpreteert de betekenis van een procedure • De leerling past een procedure aan en past hem toe op een nieuw, onbekend probleem
Wiskunde gebruiken om de echte wereld te begrijpen	• De leerling beoordeelt de geschiktheid van een wiskundig model • De leerling bedenkt een wiskundig model voor een situatie in de echte wereld • De leerling gebruikt een wiskundig concept (“begrip”) in de echte wereld • De leerling gebruikt een bekende procedure om een probleem in de echte wereld op te lossen • De leerling ziet in dat eenzelfde situatie in de werkelijkheid met verschillende modellen kan worden weergegeven • De leerling beoordeelt een model in de echte wereld

Voor meer indicatoren over wiskundig redeneren, zie ook Deel I, paragraaf 4.6 (Redeneeracties van leerlingen beoordelen). In deel 4.4 staat nog een voorbeeld over Oplossingen van leerlingen delen tijdens klasdiscussies.

4.4 Het interview met de caseleerlingen voorbereiden

Bedenk tijdens de voorbereiding van de onderzoeksles hoe het (korte) interview na de onderzoeksles georganiseerd wordt. Bedenk ook interessante vragen. Naarmate je meer ervaring krijgt met Research Lesson Study, zul je deze meer kunnen aanpassen aan de onderzoeksles, de leerlingen en de focus van de Research Lesson Study die je uitvoert. Gebruik het **Formulier Interview** om relevante vragen op te schrijven.

We stellen voor om te kiezen tussen een interview met elke caseleerling afzonderlijk of één interview met alle caseleerlingen samen, een zogenaamde 'focusgroep'. Individuele interviews zullen je helpen om diepgaande antwoorden van leerlingen te krijgen, wat leidt tot een hoger potentieel aan inzichten. Een nadeel is dat individuele interviews meer tijd kosten om te organiseren. Een focusgroep is een interessante manier om standpunten uit te wisselen en eventuele gelijkenissen of verschillen tussen leerlingen te bespreken. Deze dynamiek is er niet in een afzonderlijk interview. Focusgroepen zijn ook minder tijdrovend dan individuele interviews. Een nadeel van een focusgroep is dat de spreektijd van sommige leerlingen aanzienlijk groter kan zijn dan die van anderen, waardoor hun bijdrage onevenredig groot wordt. Beslis in dit stadium of je individuele interviews wilt doen met elke caseleerling of één focusgroep wilt maken.

Bij het interviewen moet je vermijden om te veel vragen tegelijk te stellen zonder je leerling(en) tussendoor tijd te geven om te antwoorden. Een ander probleem kan zijn dat je suggestieve vragen stelt die al een antwoord suggereren en dus sociaal gewenste antwoorden zouden kunnen opleveren. Wij raden aan om eenvoudige **open vragen te stellen waarbij de leerling de ruimte krijgt om vrij te antwoorden**. Een goed interview geeft de leerling meer gelegenheid om te spreken dan de interviewer. Ook moet de interviewer bijvragen stellen wanneer het antwoord niet duidelijk of nogal oppervlakkig is. Wanneer een leerling bijvoorbeeld een vraag met 'ja', 'nee' of 'soms' beantwoordt, kun je de leerling vragen dit antwoord nader toe te lichten. Bedenk van tevoren welke aanvullende vragen je kan stellen en formuleer deze vragen ook open genoeg.



Hieronder vind je enkele voorbeelden van vragen over wiskundig redeneren voor een interview met de caseleerlingen:

- Wat vond je het leukst aan de lessen over wiskundig redeneren? Leg uit met een voorbeeld.
- Wat was het moeilijkste onderdeel voor jou? Geef een voorbeeld.
- Kon je de problemen oplossen? Hoe? Geef een voorbeeld.
- Wat heb je geleerd? (Wat kan je nu doen dat je eerder niet kon doen? Wat kan je beter? Op welk vlak is het beter?)
- Op welke manieren denk je dat de lessen hebben bijgedragen aan je begrip van wiskunde?
- Hoe heeft de opzet (bijv. werken in groepen) voor jou gewerkt? Kon je met je buur overleggen?
- Welke hulpmiddelen waren er voorzien? Waren ze nuttig, of zou je andere hulpmiddelen nodig hebben?
- In welk opzicht waren de lessen over redeneren anders (of niet) dan andere lessen? Leg uit met een voorbeeld.
- Op welke manieren waren de lessen over redeneren nuttig (of niet) voor jou?
- Als jij deze les zou geven aan een andere klas, wat zou je dan veranderen? Waarom zou je dat aspect veranderen?
- Wat voor steun heb je gekregen in de klas? Van je medeleerlingen? Van de leraar? Hoe goed heeft het je geholpen om door te gaan? Had je nog iets anders nodig? Beschikbaarheid?

Wij stellen voor om het interview met de caseleerlingen toe te spitsen op hun leerervaringen. Het doel is om een beter inzicht te krijgen in de leerervaringen van de leerlingen in de 'redeneerklassen'. We onderzoeken hoe leerlingen de vakinhoud ervaren en hoe ze leren in dergelijke leeromgevingen, in het bijzonder met betrekking tot: (1) hun gebruik van hulpbronnen (materieel, digitaal, sociaal/menselijk), (2) de ondersteuning die zij (ervaren) nodig (te) hebben om te leren, (3) vaardigheden en capaciteiten die zij ontwikkelen en (4) werkvormen die (volgens hen) het beste werken (bijv. samenwerken).

Je kan de leerlingen ook meerdere kaarten geven met stellingen op (bv. "De wiskundige opgaven waren gemakkelijk", "De redeneeropgaven waren spannend", "Ik had niet gedacht dat ik zulke wiskunde zou kunnen."). De leerlingen wordt dan gevraagd de uitspraken te rangschikken van degene waar ze het meest mee eens zijn tot degene waar ze het minst mee eens zijn. Nadien kan je over de rangschikking praten (bv. "Waarom ben je het meest eens met stelling X?"). Vooral voor minder spraakzame leerlingen kan deze methode nuttig zijn om zich uit te drukken tijdens de interviews.

Aanvullende vragen wanneer je meer wil weten:

- Kan je een voorbeeld geven van wat je bedoelt?
- Kan je dat meer in detail uitleggen?
- Kan je er iets meer over zeggen?
- Wat bedoel je?
- Hoe is dat gebeurd?
- Wanneer was dat?
- En toen?

Als je niet zeker weet of je het antwoord goed begrepen hebt:

- Als ik het goed begrijp, dan...
- Wat ik het goed samen als ik zeg dat...

4.5 Een korte vragenlijst of een exit card opstellen voor alle leerlingen (optioneel)

Het doel van een Research Lesson Study is om het leerproces van de leerlingen beter te begrijpen en/of te verbeteren. Aangezien de focus ligt op drie caseleerlingen per klas, kan het interessant zijn om de impact van de onderzoeksles op andere leerlingen te onderzoeken met behulp van een korte vragenlijst of exit card na één of meer onderzoekslessen. Deze korte vragenlijst of exit card op klasniveau kan inzicht geven in de algemene percepties van alle leerlingen over de onderwijsactiviteiten die tijdens de onderzoeksles werden uitgevoerd. Het zou ook een interessante aanvulling kunnen zijn op de interviewgegevens die verzameld werden over de caseleerlingen. Het is dus nuttig om bij het opstellen van het lesplan na te denken over mogelijke vragen voor alle leerlingen.

Hieronder geven we een voorbeeld van een vragenlijst⁵⁸. Bedenk vragen die relevant zijn voor je onderzoeksvraag en die passen in het lesplan. Een voordeel van de korte vragenlijst is dat het invullen maar een paar minuten duurt en dat de leraar een goed overzicht krijgt van hoe alle leerlingen de onderzoeksles hebben ervaren. Een nadeel is dat leerlingen de vragen op verschillende manieren kunnen interpreteren. Het is dus belangrijk om na te gaan in welke mate de leerlingen de concepten in de vragenlijst begrepen hebben. Gebruik de **vragenlijst voor alle leerlingen**. Hieronder vind je een ingevuld voorbeeld

Tabel 2

Illustratie: vragenlijst voor alle leerlingen – hun ervaring van de onderzoeksles

KLAS 1 Aantal leerlingen: 20	Helemaal niet akkoord	Niet akkoord	Akkoord	Helemaal akkoord
Ik vond de wiskundeopdrachten/ oefeningen interessant.	2 (leerlingen hebben dit antwoord gekozen]	5 (waarvan 1 caseleerling)	12 (waarvan 2 caseleerlingen)	1
Ik werkte goed mee tijdens deze wiskundeopdrachten.	1	3	14 (waarvan 2 caseleerlingen)	2 (waarvan 1 caseleerling)
Ik was gemotiveerd bij het oplossen van de rekenopdrachten.	0	4	12 (εκ των οποίων 3 μαθητές- περίπτωσης)	4
Ik heb het gevoel dat ik bijgeleerd heb door deze wiskunde-opgaven op te lossen.	5 (waarvan 1 caseleerling)	7 (waarvan 2 caseleerlingen)	7	1
Ik werd uitgedaagd tijdens het oplossen van deze wiskunde-opgaven.	2 (waarvan 1 caseleerling)	3 (waarvan 2 caseleerlingen)	11	4

Twintig leerlingen, waarvan 3 caseleerlingen, vulden de vragenlijst in. In deze situatie werden de leerlingen uitgenodigd om per twee een reeks rekenopgaven op hun eigen manier op te lossen, terwijl de leraar beschikbaar was voor eventuele vragen. Op basis van de verdeling van de scores van de leerlingen in de tabel kwam de Research Lesson Study-groep tot een aantal interessante conclusies. Het is duidelijk dat de meerderheid van de leerlingen de onderzoeksles interessant vond. Hoewel enkele leerlingen aangaven niet goed mee te werken tijdens de les, werkten de meesten wel goed mee en konden ze de les ook goed volgen. Ook de caseleerlingen gaven dit aan. Het gevoel iets geleerd te hebben was iets minder positief. Twaalf leerlingen, waaronder de caseleerlingen, gaven aan niet of helemaal niet het gevoel te hebben dat ze iets

geleerd hadden. Op het gebied van uitdaging is er een groter verschil tussen de caseleerlingen en hun klasgenoten. De meeste leerlingen zeiden dat ze werden uitgedaagd tijdens de les, terwijl dit eerder niet het geval was voor de caseleerlingen.

Je kan ook 'exit cards' gebruiken om leerlingen na elke les te vragen naar hun ervaringen. Een voordeel van exit cards is dat leraren meer uitgebreide feedback krijgen over hun onderzoeksles. Een nadeel is dat het invullen van deze vragenlijst de leerlingen meer tijd zal kosten (minstens 10-15 minuten). Gebruik **Exit Card voor alle leerlingen**. De voorgestelde vragen kan je aanpassen aan het onderzoeksdoel en de onderzoeksvraag.

⁵⁸Bodvin, et al., 2020

5. De eerste onderzoeksles geven

5.1 Richtlijnen voor de leraar

Leg de leerlingen uit dat je probeert de manier van lesgeven te verbeteren en dat er daarom andere leraren zijn die observeren, aantekeningen maken en na de les met sommige leerlingen praten. Leg uit dat je hen zal vertellen wat je ontdekt en hun mening zal vragen.

De leraar volgt de lesvoorbereiding en wijkt hier best zo min mogelijk van af. Anders wordt het moeilijker om de kwaliteit van de onderzoeksles na te gaan. Aan het einde van de onderzoeksles vraagt de leraar aan alle leerlingen hoe ze de onderzoeksles hebben ervaren (bijvoorbeeld met een korte vragenlijst) en aan de caseleerlingen om te blijven voor een kort interview met de observator(en). De leraar kan de caseleerlingen vertellen dat ze willekeurig geselecteerd zijn voor een interview. Aan het einde van elke onderzoeksles bedankt de leraar alle leerlingen voor hun medewerking.

5.2 Richtlijnen voor de observatoren

Omdat de onderzoeksles samen opgesteld werd, is ze ook gezamenlijk eigendom van de Research Lesson Study-groep. Dit betekent dat de focus van de observatoren minder op de leraar en meer op de **leerlingen -in het bijzonder de caseleerlingen-** gericht is. De observatoren zullen in de onderzoeksles afwisselend hun aandacht 'ingezoomen' op een caseleerling en dan 'uitzoomen' om een grotere groep of de hele klas in beeld te laten komen op andere momenten.



Kelly, Steven en Rayan, drie wiskundeleraren uit Vlaanderen (België) die deelnamen aan het LESSAM-project (2022-2023) onderzochten hoe ze cognitief begaafde leerlingen konden uitdagen met wiskundig redeneren. Ze deden dit door hen complexe problemen voor te leggen die verband hielden met de wiskundige inhoud (bijv. tweedegraadsvergelijkingen/kwadratische vergelijkingen oplossen door middel van kwadraat afsplitsen). De drie leraren observeerden de caseleerlingen, maar merkten dat de hele klas de uitdagende oefeningen wilden oplossen. Ook voor de andere leerlingen werkte het stimulerend om op een andere manier naar een probleem te kijken. Ze zoomden dus in op de caseleerlingen, maar lieten de hele klas in beeld komen.

Hieronder geven we enkele richtlijnen voor de observator(en):

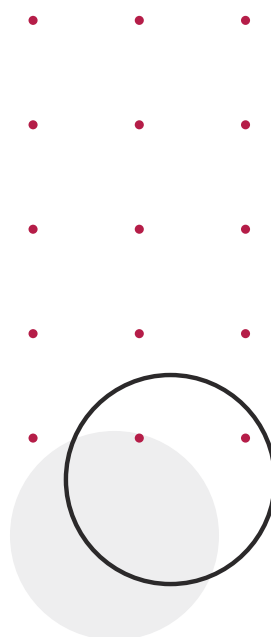
- Ga naar de leerlingen toe en begeef je tussen de leerlingen, zodat je de les vanuit hun perspectief ervaart.
- Als er meer dan één observator in de klas is, kunnen ze toch dezelfde leerlingen observeren: waarschijnlijk noteren de observatoren verschillende dingen (omdat klaslokalen zo snel bewegen en onvoorspelbaar zijn) en zelfs als ze hetzelfde opmerken, wordt het vaak heel verschillend geïnterpreteerd of uitgelegd.
- Als de observator de caseleerlingen niet kent, kan men naamkaartjes, een plattegrond van de klas of een foto van de caseleerlingen gebruiken.
- Zorg ervoor dat de observator nooit het zicht van de leerlingen op het bord of de leraar blokkeert.
- Respecteer altijd de privacy en het psychologisch welbevinden van de leerlingen. Als een leerling uitdrukt (verbaal of met lichaamstaal) dat hij of zij zich ongemakkelijk voelt om geobserveerd te worden, praat dan met de leerling en stop de observatie indien nodig.

De observator(en) moet(en) proberen de reacties van de leerlingen op verschillende momenten in de les vast te leggen - en hoe die overeenkomen of verschillen van wat er in dat stadium verwacht werd.

Wat is de beste manier om te observeren? Gebruik een open observatie of laat je leiden door de gedragsindicatoren die vermeld staan in het **Formulier Lesplan en Observatie**. Schrijf zo duidelijk mogelijk op wat je ziet. Of specifieker: beschrijf zo duidelijk mogelijk de activiteiten en het specifieke gedrag of de uitingen van gevoelens van de caseleerling(en) die je observeert. Noteer ook eventuele kritische incidenten. Als er sprake is van een patroon (bijvoorbeeld dat alle caseleerlingen iets op dezelfde manier verkeerd begrijpen) noteer dat dan in de kolom 'waargenomen reactie'. Noteer zo mogelijk ook in welke fase van de les je elke aantekening maakt.

Zoek naar bewijzen om de voortgang van elke leerling ten opzichte van wat gepland was en de mate waarin de geplande doelen bereikt zijn. Wat zijn de belangrijkste aandachtspunten voor de volgende les voor de individuele caseleerlingen, de leergroepen waartoe ze behoren (bv. leerlingen met een goede, gemiddelde of minder dan gemiddelde vooruitgang) of de klas? Wat zou je hen willen vragen in het interview na de les? Noteer dit bij 'eerste gedachten, ideeën, bedenkingen' onderaan de pagina.

Als de onderzoeksvraag verkennend is, zonder sterke veronderstellingen of vooraf vastgelegde ideeën, is het misschien moeilijk om een verwacht antwoord of gedrag op te schrijven. In dat geval kan je deze cellen in het begin open laten. Probeer tijdens de observatie kritische gebeurtenissen in verband met het denken en redeneren van de leerlingen te identificeren. Denk kritisch na over de kenmerken van de taak met betrekking tot wiskundig redeneren, over het feitelijk redeneren van de leerlingen en over wat de leraar doet om het redeneren van de leerlingen te ondersteunen. Na een of twee onderzoekslessen is de verwachte respons misschien duidelijker en kan dit ook aangevuld worden.



6. Caseleerlingen interviewen en de korte vragenlijst/exit card afnemen

6.1 De caseleerlingen interviewen

Na de onderzoeksles worden de caseleerlingen geïnterviewd om te ontdekken wat voor hen werkte en waarom, wat ze vonden dat ze geleerd hebben en wat er volgens hen nog verbeterd kan worden. Het interview moet kort zijn (niet meer dan 5 minuten) en kan met alle caseleerlingen tezamen of individueel gedaan worden. Probeer het interview zo snel mogelijk na de les te houden - idealiter op het einde van de les. Probeer enkele van hun exacte woorden in je notities te noteren. Het is ook mogelijk om het leerlingensinterview na de onderzoeksles te houden met andere leerlingen die tot dezelfde drie groepen behoren (bv. leerlingen met goede, gemiddelde of minder dan gemiddelde voortgang) als de caseleerlingen. Dat kan helpen om de bevindingen uit te breiden, maar het kan de dataset ook ingewikkelder maken. We raden aan om je te concentreren op de drie caseleerlingen. Gebruik het **Formulier Interview** om aantekeningen te maken tijdens het interview.



Om het interview van de caseleerlingen vlot te laten verlopen, formuleren we enkele nuttige richtlijnen. Bereid het interview voldoende voor:

- Informeer de caseleerlingen dat het interview kort of direct na de les zal plaatsvinden.
- Zorg voor een rustige locatie voor het interview.
- Probeer de spraakzaamheid van de caseleerlingen op voorhand in te schatten en hou daar rekening mee bij het voorbereiden van de vragen.

Houd tijdens het interview het volgende in gedachten:

- Als inleiding op het interview vermeld je dat je graag wil weten wat de leerling van de les vindt. Daarom zal je enkele vragen stellen over de les. Op die manier verleg je de aandacht van de leerling naar de les en voelt de leerling zich minder bedreigd. Spreek de leerling ook expliciet aan op de mogelijke bijdrage aan het lesontwerp: 'We zijn erg benieuwd naar wat je van de les van daarnet vond. Door jouw ervaringen willen we de les verbeteren, voor jou en je klasgenoten, maar ook voor andere leerlingen. Dus, zou je je gedachten over de les met mij willen delen? Ik heb een aantal vragen voorbereid. Er zijn geen juiste of foute antwoorden.'
- Respecteer altijd de privacy en het psychologisch welzijn van de leerlingen. Als een leerling (verbaal of met lichaamstaal) aangeeft dat hij of zij zich ongemakkelijk voelt bij het beantwoorden van de interviewvragen, praat er dan over met de leerling en stop het interview indien nodig.
- Maak bij voorkeur een opname van het gesprek, zodat je je kan concentreren op het luisteren en de antwoorden niet hoeft op te schrijven. Vraag toestemming en maak duidelijk dat de opname niet met anderen gedeeld zal worden.

- Durf stiltes toe te staan. Op die manier geef je de leerling tijd om na te denken.
- Reageer zo op antwoorden dat de leerling het gevoel krijgt dat elk antwoord goed is en gewaardeerd wordt. Zo voorkom je dat de leerling 'foute' antwoorden geeft. Een antwoord als 'oké', 'ja', of 'goed om te weten' is neutraler dan bijvoorbeeld 'goed' of 'ik ben blij om dat te horen'. Bedank de leerling tot slot voor zijn of haar inbreng.
- Stel de vragen op een spontane manier, zonder duidelijk af te lezen.
- Voor minder ervaren groepen: blijf zo veel mogelijk bij de voorbereide vragen. Op die manier loop je minder kans om in de valkuil van gesloten of suggestieve vragen te trappen en blijft de focus gericht op hoe de leerling de les heeft ervaren.
- Hoewel de focus van het interview ligt op hoe de leerling de les heeft ervaren, kun je ook een vraag stellen die verwijst naar een opvallende of onduidelijke observatie. Zorg ervoor dat je de leerling niet intimideert. Ga daarom niet te veel in op details. Het kan zijn dat een leerling niet al zijn of haar handelingen tijdens een les kan verantwoorden.
- Als er tijdens de onderzoeksles iets niet naar wens is verlopen, maak dan van de gelegenheid gebruik om samen met de leerling na te denken over hoe het in de toekomst anders kan.

6.2 Een korte vragenlijst of exit card voor alle leerlingen afnemen (optioneel)

Je kan ervoor kiezen om alle leerlingen aan het einde van de onderzoeksles te bevragen over hun ervaringen via een korte vragenlijst of een exit card (zie ook 'vragenlijst/exitcard voor alle leerlingen', blz. 62). Deze vragenlijst is optioneel en kan op papier of digitaal (bv. via Google-formulieren) worden aangeboden. Voorzie enkele minuten aan het einde van de onderzoeksles om de vragenlijst af te nemen. De leraar legt uit dat hij/zij wil weten wat de leerlingen van de les vonden via een vragenlijst. Het is belangrijk te benadrukken dat deze vragenlijst anoniem zal worden verwerkt. Als de anonimiteit gegarandeerd is, zullen leerlingen minder geneigd zijn sociaal wenselijke antwoorden te geven. Dit kan bijvoorbeeld door een doos bij de deur te plaatsen of door een 'brievenbus' te maken waarin leerlingen de ingevulde vragenlijst kunnen deponeren. Als je de antwoorden van de caseleerlingen wilt vergelijken met die van de klasgroep, kan je een kruisje of een ander herkenningsteken zetten op de vragenlijsten van de caseleerlingen. Zonder de anonimiteit te schenden, kan je de formulieren van de caseleerlingen herkennen en hun antwoorden vergelijken met de antwoorden van de andere leerlingen in de klas.

Verwerk de ingevulde vragenlijsten als voorbereiding op de nabespreking van de onderzoeksles.

7. Nabespreking van de onderzoeksles

Kom zo snel mogelijk samen na de onderzoeksles. Idealiter voer je dit gesprek direct na de onderzoeksles (en zeker niet later dan 24 uur erna). De volgende richtlijnen zorgen voor een succesvolle nabespreking:

- Beschouw de nabespreking van de les als een gezamenlijke leermogelijkheid
- Sta open voor kritische standpunten en suggesties
- Respecteer de geobserveerde gegevens
- Gebruik de duidelijke doelen en vragen uit het **Formulier Lesplan en Observatie**
- Kies een moderator voor de nabespreking (een voorzitter die de discussie positief kan leiden)
- Zorg voor een laatste commentator die de nuttige informatie uit de discussie filtert, zodat de groep en anderen er iets mee kunnen doen.

Het belangrijkste om te onthouden is dat de analyse moet beginnen met de waarnemingen van het leerproces van de caseleerlingen voordat het lesgeven aan bod komt. Zo blijft de focus gericht op het leerproces van de leerlingen en vermindert de kans dat discussies over de lesobservaties uitdraaien op feedback over het lesgeven (wat leraren kunnen ervaren als veroordelend en niet bevorderlijk voor hun eigen leerproces). **Probeer naar elkaar te luisteren en bouw voort op elkaars ideeën door suggesties te doen, elkaars gedachten in vraag te stellen, hypotheses op te werpen, uit te weiden, enz.**



David en Alex, twee leraren uit Griekenland namen in 2022-2023 deel aan het LESSAM. Ze bestudeerden hoe een cultuur van onderlinge communicatie en discussie in de klas kan worden gecreëerd. Op basis van de observatie van twee caseleerlingen hebben de leraren hun onderwijsaanpak voor alle studenten gewijzigd:

In de eerste les (eerste Lesson Study-cyclus) koos David ervoor om de leerlingen te laten werken in groepjes van twee (per bureau). De twee caseleerlingen die aan hetzelfde bureau zaten, hadden echter geen betekenisvolle interactie. Ze werkten bijna volledig onafhankelijk van elkaar: de ene leerling volgens een algebraïsche benadering en de andere volgens een geometrische benadering van de toegewezen taak. Alex, de andere leraar, constateerde een gelijkaardig fenomeen in andere groepen. In de daarop volgende nabespreking ontstond hierover enige discussie en de leraren kozen ervoor om de leerlingen in grotere groepen in te delen in de tweede onderzoeksles die volgde.

In de volgende lessen kozen beide leraren ervoor om 4-5 leerlingen in elke groep op te nemen. Deze keuze, in combinatie met de aanwijzingen van de leraren aan elke groep om te discussiëren en samen een antwoord te formuleren, had een significant effect op de klascommunicatie in de daaropvolgende lessen en

de leerresultaten. De discussie van de leerlingen in elke groep was rijker, hun interactie betekenisvoller, en de presentatie van de antwoorden van elke groep droeg op een andere manier bij aan de hele klasdiscussie. De inhoud van de laatste drie lessen (tweede Lesson Study-cyclus) was toevalsafhankelijke (stochastische) wiskunde en de voorkennis van leerlingen over dit topic was beperkt. Desalniettemin maakte de aangeleerde wijze van communiceren en discussiëren in de groepen het mogelijk om zeer interessante ideeën te formuleren die wezen op een diepere betrokkenheid en een intuïtief begrip van alle leerlingen van moeilijke concepten zoals variabiliteit. De leerlingen bespraken bijvoorbeeld in groepen de boxplots* van de prestaties van verschillende steekproeven van leerlingen, observeerden en becommentarieerden de variabiliteit tussen verschillende steekproeven van leerlingen evenals de variabiliteit binnen elke steekproef, maakten vergelijkingen en gaven mogelijke interpretaties.

*Boxplot is een gestandaardiseerde manier om de distributie van gegevens weer te geven op basis van een vijfciijferige samenvatting ("minimum", eerste kwartiel [Q1], mediaan, derde kwartiel [Q3] en "maximum").

Gebruik in deze fase het **Formulier Nabespreking**. Dit formulier vermeldt alle aspecten die tijdens de nabespreking het best aan bod komen:

- de geobserveerde ontwikkeling van de caseleerlingen (zoals blijkt uit de observaties en interviews);
- mogelijke verschillen en overeenkomsten tussen de caseleerlingen;
- ervaringen van de hele klas tijdens de onderzoeksles (en een vergelijking met de ervaringen van de caseleerlingen op basis van de vragenlijst);
- de verwachte uitkomsten van de onderzoeksles, de lesaanpak en mogelijke verrassingen;
- dingen die de groep anders zou willen doen in een volgende onderzoeksles.

Na de laatste onderzoeksles in een Lesson Study Cyclus van drie onderzoekslessen formuleert de groep een (vaak gedeeltelijk) antwoord op de onderzoeksvraag en vatten de leden samen wat ze geleerd hebben. Probeer bij de bespreking van wat de groep geleerd heeft niet alleen te beschrijven wat er gebeurd is, maar ook te interpreteren wat er gebeurd is en vooral **waarom**. Deze inzichten kunnen waardevolle uitgangspunten zijn voor een volgende Research Lesson Study-cyclus.



Hieronder vind je een voorbeeld van een post Research Lesson Study discussie van een Lesson Study team in een school in Camden, Londen (UK). Het is een discussie over één van de caseleerlingen, Alex, na een les over vermenigvuldigen.

1	Ryan	Ik heb Alex. Hij deed het heel goed. Hij had ook het oefenpapier en ja, hij... het eerste wat ik hem vroeg was: 'wat vond je het leukste aan de les?' Hij zei: 'Ik vond dat het heel vlot ging, hoewel ik nog steeds meer uitdaging wil'.
2	Gabriela (class teacher)	Ja natuurlijk.
3	Ryan	En ik zei 'heb je begrepen waarom Gabriela je vroeg om te oefenen?' En dat deed hij niet echt.
4	Ashley	Het is echt moeilijk. Wat hier vaak uit naar voren is gekomen, is een groep kinderen die de oefeningen net iets trager dan gemiddeld snapt, maar zo wanhopig graag op of boven dat gemiddelde wil zitten, dat ze niet meer hun best doen om het volledig te begrijpen, hoewel ze daar misschien nog niet helemaal zijn. Dat kan ze niet schelen, ze willen alleen maar dat het lijkt alsof ze het snappen.
5	Gabriela	Ja, dat is het bijzondere eraan.
6	Ashley	Ja, en dat maakt het echt moeilijk. Omdat je het gevoel hebt dat het bijna de strijd is tussen 'je moet dit doen', 'nee, ik wil dit doen'.
7	Ryan	Maar ik bedoel ... alle lof voor [Alex], hij werkte heel goed aan de oefeningen op zichzelf en hij slaagde erin om het te begrijpen.
8	Gabriela	Oh, ja.
9	Ashley	Ik herinner me dat.
10	Ryan	... Dat is geweldig. En ik denk dat hij zich echt goed voelde.
11	Ashley	Nou, dat is een prestatie, toch? (Opmerking: verwijzend naar het werkboek)
12	Ryan	En hij was echt, in vergelijking met de les van gisteren was hij echt heel enthousiast.
13	Ashley	Dus heeft hij onze verwachtingen overtroffen? (Opmerking: verwijzend naar het werkboek)
14	Ryan	Ja, zeker.
15	Ashley	Net zoals James eigenlijk. [Opmerking: een andere caseleerling]
16	Gabriela	Ja. We hebben ze allebei onderschat.
17	Ashley	Ja.
18	Ryan	Er is me wel iets anders opgevallen, weet je nog dat we zeiden dat hij zou blijven verdubbelen omdat hij houdt van verdubbelen?
19	Ashley and Gabriela	Ja.
20	Ryan	Ik heb beseft dat hij het woord 'verdubbelen' gebruikt in plaats van 'vermenigvuldigen'. Hij denkt dat 'verdubbelen' 'vermenigvuldigen' is. Dus hij zegt bijvoorbeeld 'Ik verdubbel twee met drie om zes te krijgen'.
21	Gabriela	Oh dat was me nog niet opgevallen.
22	Ryan	En ik zei 'je bedoelt dat je twee vermenigvuldigt met drie om zes te krijgen'. En hij zei 'oh ja, ja, ja'. Maar hij deed het later nog een keer dus wees je daar bewust van Gabriela.
23	Gabriela	Ja dat is echt goed om te weten.
24	Ryan	Ik zei: 'weet je wat verdubbelen is?'

25	Ashley	Wie was het die zei, in het begin, die zei, toen we het over verhoudingen hadden, of was het op het einde en ze zeiden dat is wanneer je een getal verdubbelt' en ik zei 'verdubbel je het altijd?' en ze hadden zoiets van 'oh nou, niet per se'. Want ik zei 'we verdubbelen het hier want het is... Iemand anders had dat gezegd in het begin.
26	Gabriela	Ja.
27	Ashley	En ik had zoiets van 'nou je verdubbelt niet altijd want je zou het kunnen verdelen', dus iemand anders...
28	Gabriela	Misschien hebben we te veel voorbeelden gegeven van verdubbeling.
29	Ashley	...wanneer ze verdubbelen.
30	Ryan	Ja misschien wel.
31	Gabriela	Dat is goed om te weten.

De fragmenten laten zien hoe de leraren (Ryan en Ashley) informatie uit hun observaties combineerden en zich realiseerden (bijv. Gabriela, zie regel nr.28) dat de les te veel voorbeelden van verdubbelen bevatte, waardoor de leerlingen het woord 'vermenigvuldigen' verwarde met 'verdubbelen'.

De planning van de volgende onderzoeksles valt in principe buiten de nabespreking, maar kan aansluitend gebeuren. De splitsing tussen de nabespreking en de planning van de volgende onderzoeksles moet ervoor zorgen dat de groep eerst de nodige discussies voert om een volledig beeld te krijgen van de impact van de onderzoeksles op de caseleerlingen. Daarna kan de groep de volgende onderzoeksles zo nodig aanpassen.

De bespreking van de onderzoeksles heeft ongetwijfeld mogelijke aanpassingen opgeleverd. Het doel van de aanpassingen is om de gewenste uitkomst van de onderzoeksvraag nog beter te bereiken bij de caseleerlingen (en andere leerlingen van de klas).

Een mogelijke sturende vraag is: "Op welke gebieden en/of momenten in de les kan het leerproces van de caseleerlingen verder geoptimaliseerd worden?"

In de volgende fasen wordt de (aangepaste) onderzoeksles opnieuw gegeven en geobserveerd, worden de caseleerlingen geïnterviewd en wordt de les nabesproken. Een Research Lesson Study (zie ook figuur p. 7) bestaat uit drie onderzoekslessen die na elke les worden besproken. Aan het eind van een Research Lesson Study is er een algemene evaluatie.



In het volgende voorbeeld passen drie leraren uit Griekenland hun lessen aan in kader van het LESSAM-project (2022-2023). Door dit te doen, kregen ze meer inzicht in de mate van betrokkenheid van leerlingen bij wiskundig redeneren.

Alexandra, Chloe en Andrew, drie ervaren wiskundeleraren uit Athene (Griekenland) waren geïnteresseerd in hoe ze alle leerlingen konden betrekken bij de wiskundelessen. Ze werkten aan hoe ze verschillende versies van dezelfde taak konden ontwerpen, rekening houdend met verschillende niveaus van wiskundige uitdaging. Ze kozen voor homogene groepering van leerlingen, met respect voor hun wiskundige achtergrond en interesse. Bij de eerste implementatie merkten ze op dat leerlingen die gewoonlijk worstelen met wiskunde, niet genoeg tijd hadden om hun argumenten te verfijnen en een antwoord te formuleren op de probleemstelling. Daarom besloten ze een extra lesuur in te richten om leerlingen die worstelden met wiskunde verder te ondersteunen. In deze les herschikten de leraren de groepen leerlingen in heterogene groepen. Zo konden de leerlingen de oplossingsstrategieën die ze in de vorige les hadden ontwikkeld, delen en beargumenteren in de nieuwe groep. Hoewel het doel om het wiskundig redeneren van leerlingen die met wiskunde worstelen te ondersteunen, succesvol was, observeerden de leraren dat leerlingen die sterk zijn in wiskunde hun interesse leken te verliezen. Dus in de derde onderzoeksles werkten ze met als doel alle studenten te betrekken zonder de wiskundige uitdaging te verminderen. Het doel om wiskundig redeneren te faciliteren voor iedereen, versterkte leraren om meer inzicht te krijgen in het ondersteunen van de mate van betrokkenheid van alle leerlingen.



Opdracht voor de leraar:

Lees het voorbeeld en bespreek de onderstaande vragen met jouw Research Lesson Study-groep. Probeer op dezelfde manier na te denken over de rol die je gekozen hebt, de acties die het wiskundig redeneren van de leerlingen bevorderen en over de samenwerking tussen de leraren.

Voorbeeld:

Leraar 1 (L1) gaf zijn leerlingen (eerste middelbaar/brugklas) de onderstaande figuren en vroeg hen het aantal vierkanten te berekenen in de 5e figuur, in de 10e figuur en dit uit te leggen aan de hand van een figuur.



Leraren delen ervaringen en wijzigen hun onderwijsmethode.

In de les gaf de leraar uitleg om de leerlingen te helpen het vierkant te gebruiken dat het patroon n^2 illustreert. De leerlingen werkten in groepen, waarbij L1 en zijn collega (L2) tussen de groepjes liepen en hen hielpen zonder de antwoorden voor te zeggen. L2 is wiskundeleraar op dezelfde school. Zij was daar om de les van L1 te observeren en zij ondersteunde de leerlingen ook samen met L1.



Na de les bespraken ze elkaar en beiden leken tevreden met het werk van de leerlingen, maar niet met de manier waarop de leerlingen hun gedachten en redeneringen deelden. Ze waren het erover eens dat de leerlingen niet bereid waren hun redenering grondig uit te leggen en zagen het gebrek aan klassikale discussie als oorzaak. Twee dagen later gaf L2 dezelfde les in haar klas, terwijl L1 observeerde en de les ondersteunde. De belangrijkste verandering die L2 doorvoerde was een klassikale discussie na elke fase van de taak. Aan de leerlingen werd uitdrukkelijk gevraagd hun oplossingen en redeneringen te demonstreren.

Vragen:

- Wat vind je van de taak die L1 en L2 gebruikt hebben? Hoe bevordert die het wiskundig redeneren?
- Wat denk je dat ze zouden kunnen veranderen? Waarom?
- Als jij in de les van L1 zou zitten, waar zou je dan je observatie op willen richten? Waarom denk je dat dit belangrijk is?
- Heb je ervaringen met het observeren van de les van anderen, of met anderen die jouw les observeren? Wat is volgens jou de waarde van intercollegiale observatie? Wat zijn de moeilijkheden?
- Met de gegeven informatie in het achterhoofd, welke acties zou je kunnen ondernemen a) om het wiskundig redeneren van leerlingen te onderzoeken en b) om het wiskundig redeneren van leerlingen te vergemakkelijken?

8. De algemene evaluatie

Aan het einde van elke Research Lesson Study reflecteert de groep over het hele proces en de verzamelde gegevens. Die reflectie is nodig om de stap te maken van het uitwisselen van ervaringen naar een meer geïntegreerd begrip van de praktijk: van 'wat' en 'hoe' iets werkt met de caseleerlingen naar 'waarom' iets werkt. De uitkomst van dat reflectiemoment kan helpen bij het bepalen van de focus en agenda van een volgende Research Lesson Study (als er meerdere Research Lesson Studies gepland zijn). Tijdens de algemene evaluatie reflecteert de groep ook over wat ze geleerd hebben tijdens de Research Lesson Study en wat deze inzichten betekenen voor de bredere praktijk in de klas. Het **Formulier Algemene Evaluatie** bevat sturende vragen voor de algemene evaluatie. In deze vragenlijst wordt gepeild naar samenwerking, goede momenten en werkpunten, leeropbrengsten en gevolgen van de Research Lesson Study. Een veilig (leer)klimaat is noodzakelijk om deze evaluatie te kunnen houden. Het is belangrijk dat iedereen elkaar respecteert en dat alle bijdragen gewaardeerd worden. Het is van groot belang dat leraren ideeën, bezorgdheden, uitdagingen en 'verwonderingen' kunnen delen zonder angst voor kritiek. Zij moeten elkaar als "kritische vrienden" behandelen. Deze manier van praten en overleggen leidt tot productievere gesprekken.

9. De resultaten van de Research Lesson Study delen met leerlingen en andere professionals

Na het afronden van de laatste Research Lesson Study deel je met je leerlingen wat je ontdekt hebt met Research Lesson Study en vraag je hun mening.

Probeer van in het begin een dag af te spreken waarop de groepsleden aan hun collega's kunnen vertellen wat ze gedaan, geleerd en verfijnd hebben na het afronden van hun Research Lesson Study. Het belangrijkste is de lesinhoud of pedagogische aanpak die ze ontwikkeld hebben. Als mensen van tevoren weten dat ze hun bevindingen met anderen zullen moeten delen, zullen ze dit gedurende het hele proces in gedachten houden. Dat helpt de Research Lesson Study-groep om hun gedachten en bevindingen helder, nuttig en repliceerbaar te houden. Videofragmenten van de onderzoekslessen en foto's in een PowerPointpresentatie zijn een populaire manier om de lesaanpak en -processen te delen. Je moet er wel voor zorgen dat je op school een reglement hebt voor het gebruik van video en foto's. Zorg ervoor dat leden van de Research Lesson Study-groep met andere leraren kunnen samenwerken om hen te helpen de lesaanpak die ze hebben ontwikkeld, te implementeren. Vergeet niet dat het onder woorden brengen en uitleggen van de praktijk en het zichtbaar maken daarvan voor anderen:

- a) andere leraren helpt hun praktijk te verbeteren;
- b) de prestaties verbetert van degene die de uitleg geeft of coacht.

Dat komt omdat het de vaak verzwegen praktijkervaring zichtbaar maakt die leraren gebruiken maar nooit benoemen. Door erover te praten worden ze zich meer bewust van hun kennis en daardoor kunnen ze die verder verbeteren. Vier en waardeer wat mensen geleerd en gedeeld hebben. Creëer een 'leermuur' in de lerarenkamer waar een Research Lesson Study-groep hun werk kan laten zien - foto's, notities, observaties, discussieresultaten, interviews met leerlingen en voorlopige conclusies. Dat zorgt voor gespreksstof over professioneel leren lang nadat de formele uitwisseling voorbij is.

Sommige Research Lesson Study-groepen tonen de technieken die ze ontwikkelen aan andere leraren in een open onderzoeksles. Daarbij wordt de les gegeven met een aantal extra toeschouwers. Er kan een overleg volgen waaraan zowel leerlingen als volwassenen deelnemen. Wanneer een Research Lesson Study zeer belangrijke praktijkkennis aan het licht brengt, kan een school het evenement openstellen voor genodigden van andere scholen, universiteiten of plaatselijke autoriteiten en na schooltijd een 'openbare onderzoeksles' geven.

In het LESSAM-project hebben we een [website](#) ontwikkeld om de bevindingen van de verschillende lerarenteams en de algemene impact van Lesson Study op het leren van leraren en de verbetering van het wiskundig redeneren van leerlingen te verspreiden (zie intellectuele output 6).

Op de volgende pagina's vindt u de formulieren voor elke fase van Lesson Study. U kan deze formulieren gebruiken als leidraad, ze kunnen u helpen om de onderzoekslessen te plannen en te bespreken en er diepgaand op te reflecteren.

Overzicht van de formulieren:

- Formulier Samenwerkingsprotocol
- Formulier Overzichtstabel
- Formulier Lesplan en Observatie
- Vragenlijst voor alle leerlingen
- Exit Card voor alle leerlingen
- Formulier Interview
- Formulier Nabespreking
- Formulier Algemene Evaluatie



Lege formulieren

Formulier Samenwerkingsprotocol

See handbook page 34



Dit protocol is uitgewerkt door

Gedurende volledige Lesson Study zullen we ons gedragen als volgt:

Datum en handtekening van alle groepsleden:

Formulier Overzichtstabel

See handbook page 36



Namen van de leraren in de Research Lesson Study-groep?

--	--	--

Is er een Research Lesson Study protocol? (ja/nee)

--	--	--

Klas?

--	--	--

Aantal leerlingen in de les?

--	--	--

Samenstelling klassen? Eerder homogene dan wel heel heterogene klassen?

--	--	--

Leraar?

--	--	--

Op welke les gerelateerde behoeften van de caseleerlingen wil je de focus leggen in deze Research Lesson Study?

--

Inhoudelijke focus en algemeen doel van de Research Lesson Study?

--

Op basis van welke criteria zijn de caseleerlingen geselecteerd?

--

Wie zijn de caseleerlingen (per klasgroep)?

--

Welke behoeften hebben de caseleerlingen?

--

Onderzoeksvraag?

--

XYZ-onderzoeksvraag [optioneel]:

‘We willen ontdekken welk effect lesaanpak X heeft op resultaten Z bij de caseleerlingen en welke eventuele andere factoren Y hierbij een rol kunnen spelen’.

Lesaanpak (X):

Resultaten bij de caseleerlingen - wat willen we bereiken? (Z):

Factoren die een rol kunnen spelen (Y):

--

Datum, tijdstip en lesdoel voor de leerlingen van onderzoeksles 1

--

Datum, tijdstip en lesdoel voor de leerlingen van onderzoeksles 2

--

Datum, tijdstip en lesdoel voor de leerlingen van onderzoeksles 3

--

Formulier Lesplan en Observatie

See handbook page 40,45



1/3

Klas:

Onderwerp:

Datum en Tijd:

Onderzoeksvraag:

Probeer je onderzoeksvraag zo veel mogelijk te concretiseren:

**Samenvatting van onze hypothese over hoe onze lesaanpak
wiskundig redeneren faciliteert:**

Door de lesaanpak (X)

Zullen de (case)leerlingen

Factoren die een belangrijke positieve/
negatieve rol kunnen spelen (Y)

Behoeften van caseleerlingen in verband
met wiskundig redeneren

Lesaanpak (X)

Verwachte uitkomsten (Z)

Zie ook sectie 'Een onderzoeksdoel bepalen en caseleerlingen selecteren'.

Leerdoel (inhoudelijk)

Leerdoel (wiskundig redeneren)

Leeractiviteit (wiskundetaken voor leerlingen tijdens de onderzoeksles)

Formulier Lesplan en Observatie

See handbook page [40,45](#)



2/3

Strategische vragen: Hoe ondersteun je het redeneren in de les?

-
-
-

Welk leergedrag is relevant voor observatie en geeft het/de gewenste begrip/redenering weer?

Middelen om het bewijs te verzamelen

- ☐ Korte vragenlijst of exit cards
 ☐ Observaties
 ☐ Strategische vraagstelling
 ☐ Interviews
 ☐ Andere:

Lesvolgorde (zie ook volgende pagina):

Fase en timing	Lesaanpak	Leeractiviteit van de leerlingen

Caseleerlingen:

Beginsituatie van de caseleerlingen: over welke kennis, vaardigheden en attitude beschikken de caseleerlingen?
Welke behoeften hebben deze leerlingen?

Caseleerling 1	Caseleerling 2	Caseleerling 3
Sterktes: • • • Leerbehoeften: • •	Sterktes: • • • Leerbehoeften: • •	Sterktes: • • • Leerbehoeften: • •

Formulier Lesplan en Observatie

Fase 1 van de les	Leeractiviteit van de leerlingen:	
	Verwacht(e) reactie/gedrag	Waargenomen reactie/ belangrijke momenten
Caseleerling A:		
Caseleerling B:		
Caseleerling C:		
Fase 2 van de les	leeractiviteit van de leerlingen:	
	Verwacht(e) reactie/gedrag	Waargenomen reactie/ belangrijke momenten
Caseleerling A:		
Caseleerling B:		
Caseleerling C:		
Fase ... van de les	leeractiviteit van de leerlingen:	
	Verwacht(e) reactie/gedrag	Waargenomen reactie/ belangrijke momenten
Caseleerling A:		
Caseleerling B:		
Caseleerling C:		
Geobserveerde eindsituatie van de caseleerlingen	Wat kunnen ze al? (Welke vooruitgang hebben ze geboekt en hoe weet je dat?)	Is het gewenste leerresultaat bereikt? Ja/Nee Hoe weet je dat?
Caseleerling A:		
Caseleerling B:		
Caseleerling C:		
Eerste gedachten, ideeën, reflecties		

Vragenlijst voor alle leerlingen

See handbook page 44



Lees zorgvuldig elke zin en omcirkel wat past voor jou.

1 Helemaal oneens	2 Oneens	3 Eens	4 Helemaal eens	
1. Ik vond de wiskunde-opdrachten interessant.	1	2	3	4
2. Ik heb goed meegewerkt bij het maken van de oefeningen.	1	2	3	4
3. Ik was gemotiveerd om de wiskunde-oefeningen te maken.	1	2	3	4
4. Ik heb het gevoel dat ik iets bijgeleerd heb dankzij de oefeningen.	1	2	3	4
5. Het was uitdagend om de oefeningen te maken.	1	2	3	4
6. Andere stellingen, specifiek voor jullie les.	1	2	3	4

Vragenlijst voor alle leerlingen - scoreblad

KLAS 1 Leerlingen:	Helemaal oneens	Oneens	Eens	Helemaal eens
1. Ik vond de wiskunde oefeningen interessant.				
2. Ik heb goed meegewerkt bij het maken van de wiskunde oefeningen.				
3. Ik was gemotiveerd om de wiskunde oefeningen te maken.				
4. Ik heb het gevoel dat ik iets bijgeleerd heb dankzij de wiskunde oefeningen.				
5. Het was uitdagend om de wiskunde oefeningen te maken.				
6. Andere stellingen, specifiek voor jullie les.				

Exit Card voor alle leerlingen

See handbook page [44,46](#)



Beantwoord onderstaande vragen over de wiskundeles.

Datum:

Klas(groep):

Naam van de leerling:

1. Selecteer de smiley die jouw gevoel over de les van vandaag het best beschrijft.



Leg uit waarom je deze smiley gekozen hebt:

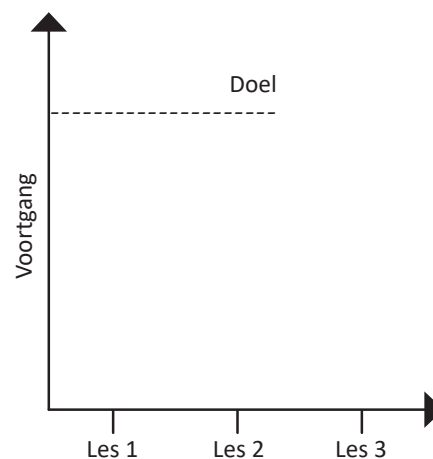
2. Beschrijf: (a) waarover de les ging vandaag en (b) welke vooruitgang je gemaakt hebt.

3. Beschrijf: (a) welke lesactiviteit je het leukst vond vandaag en (b) waarom.

4. Beschrijf: (a) de belangrijkste uitdaging/moeilijkheid die je vandaag gehad hebt en (b) hoe je ermee omgegaan bent.

5. (Optioneel) Duid op de grafiek aan welke evolutie je in iedere les gemaakt hebt ten opzichte van je doel.

Leg uit in een paar zinnen.



Formulier Interview

See handbook page 43,46



Klas:

Datum:

Tijd:

Caseleerling(en):

Vragen	Notities tijdens het interview
Wat vond je het leukst van de les? Waarom?	
Wat heb je geleerd? Wat kan je nu doen dat je eerst niet kon? Waarin ben je gegroeid? Op welke manier ben je gegroeid?	
Welk aspect van de les werkte het best voor jou? Waarom?	
Wat zouden we (anders) kunnen doen om nog beter te maken in een gelijkaardige klas? Waarom zou je dat aspect aanpassen?	
Andere vragen die passen bij jullie onderzoeksles	

Formulier Nabespreking

1/3

Please take a few minutes to answer the questions below.

Klas:

Onderwerp:

Datum En Tijd:

Omcirkel de correcte les: onderzoeksles 1 - onderzoeksles 2 - onderzoeksles 3

Herhaal jullie onderzoeksvraag:

Gebruik het formulier lesplan en observatie, het formulier interview en indien mogelijk de resultaten van de korte vragenlijst/ exit card om de volgende vragen te beantwoorden.

Reflecteren over het leerproces van de leerlingen:

1. Welke vooruitgang heeft iedere leerling gemaakt? Werd er aandacht besteed aan zijn/haar leerbehoefte? Was dat voldoende?

Klas 1	
Caseleerling A:	
Caseleerling B:	
Caseleerling C:	
Klas 2 (optioneel)	
Caseleerling A:	
Caseleerling B:	
Caseleerling C:	
Klas 3 (optioneel)	
Caseleerling A:	
Caseleerling B:	
Caseleerling C:	

Formulier Nabespreking

See handbook page 47



2/3

2. Welke verschillen of gelijkenissen bestaan er tussen de leerlingen?

3. Wat met de andere leden van de groep die ze vertegenwoordigen?

4. Hoe heeft onze lesaanpak de leerlingen geholpen of gehinderd? (misschien een beetje van beiden) Hadden sommige leerlingen meer/minder voordeel bij onze lesaanpak? Waarom (niet)?

5. Waardoor zijn we verrast?

6. Hebben we iets belangrijks ontdekt over de manier waarop de leerlingen leren?

Reflecteren over onze lesaanpak:

Herbekijk jullie onderzoeksvraag op het formulier lesplanning en observatie. Verwijs zo vaak mogelijk naar de leerlingenanalyse op de vorige pagina.

1. Heeft onderwijsmethode (X) uit jullie hypothese geleid tot de gewenste resultaten (Z)? Waarom (niet)?

2. Denk na over de belangrijke factoren die een invloed konden hebben (Y). Waren ze relevant? Waarom? Welke andere factoren bleken relevant?

3. Welk aspect van jullie lesaanpak zouden jullie de volgende keer aanpassen om de vooruitgang van de caseleerlingen en hun klasgenoten te verbeteren? Waarom? Met welke andere lesaanpakken hadden jullie de gewenste resultaten (Z) kunnen bereiken, misschien zelfs op een betere manier?

4. Dus wat zouden we volgende keer moeten proberen? Waarom? Beslis samen welke lesaanpak jullie zullen gebruiken voor de volgende onderzoeksles. Beargumenteer jullie keuze.

Formulier Nabespreking

See handbook page 47



3/3

Reflecteren over het bewijs van het leerproces van de leerlingen:

Vragen die beantwoord moeten worden na onderzoeksles 1 en 2:

1. Hebben we genoeg bewijs om onze vragen te beantwoorden? Waarom (niet)?

2. Moeten we de beoordeling van de leerlingen aanpassen? Waarom (niet)?

3. Beslis samen hoe jullie tijdens de volgende les de beoordeling zullen aanpakken:

Formulier Algemene Evaluatie

See handbook page 51



1/2

1. Algemene samenwerking in de groep: Wat vonden we positief aan de samenwerking tijdens deze Research Lesson Study? Zijn er dingen die we zouden willen veranderen? Op welke manier heeft de samenwerking bijgedragen aan ons leerproces?

2. Voortgang van de Research Lesson Study in onze groep:

	Wat ging goed? Waarom?	Wat ging niet goed? Waarom niet?	Wat zouden we veranderen? Waarom?
Een onderzoeksdoel bepalen en de caseleerlingen selecteren			
De onderzoeksles(sen) plannen			
De onderzoeksles(sen) geven of observeren			
Het interview met de caseleerlingen			
Korte vragenlijst / exit kaart (optioneel)			
Bespreking na de onderzoeksles			

Indien van toepassing: Zijn er persoonlijke gebeurtenissen of factoren die een rol gespeeld hebben tijdens de Research Lesson Study?

Formulier Algemene Evaluatie

See handbook page 51



2/2

3. Wat zijn de belangrijkste dingen die jullie ontdekt hebben over het leerproces van de leerlingen tijdens de wiskundeles?
Welke invloed zal dat hebben op jullie manier van lesgeven?

4. Wat waren de belangrijkste zaken die jullie geleerd hebben over de leerlingen die nieuw waren voor jullie?
Welke invloed zal dat hebben op jullie manier van lesgeven?

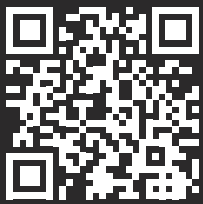
5. Welke andere dingen hebben jullie geleerd over lesgeven of leren, die niet aan bod komen in vragen drie en vier?
Welke invloed zal dat hebben op jullie manier van lesgeven?

6. Zijn er mogelijke implicaties voor het curriculum, de beoordeling of de aanpak van de wiskundelessen?

7. Welke informatie zullen jullie delen met jullie collega's die deelnemen aan het project, op jullie school en daarbuiten?

Inspirerende Weblinks

03

- 1.**  **www.ucy.ac.cy/lessam2/?lang=en**
Dit handboek werd ontwikkeld in het kader van het LESSAM-project. Dit internationale onderzoeksproject beoogt de invloed in kaart te brengen van Lesson Study op het leren van leraren en leerlingen in vier landen. Op de webpagina vindt u meer informatie en materiaal over wiskundig redeneren en lesson study. De webpagina is beschikbaar in het Engels, Grieks en Nederlands.
- 2.**  **websites.ucy.ac.cy/formas/nl/middelen.html**
De link brengt u naar de webpagina van het project "Promoting Formative Assessment: From Theory to Policy and Practice (FORMAS)". Het project had tot doel wiskundeleraren in het secundair/voortgezet onderwijs te helpen bij het ontwikkelen van formatieve beoordelingsvaardigheden. Dergelijke beoordelingsstrategieën kunnen leerkrachten helpen de leerbehoeften van hun leerlingen te identificeren en actie te ondernemen om hieraan tegemoet te komen. Deze kunnen gebruikt worden tijdens de planningssessies van Lesson Study. De webpagina bevat onder andere een handboek voor leraren. Alle materialen zijn ook beschikbaar in het Engels, Grieks en het Nederlands (klik op de opties in de rechterbovenhoek).
- 3.**  **icse.eu/activities**
Het International Centre for STEM Education (ICSE) is gevestigd aan de Universiteit in Freiburg, Duitsland en richt zich op praktijkonderzoek en de overdracht ervan naar de dagdagelijkse onderwijspraktijk. Het doel van ICSE is het STEM-onderwijs (Science, Technology, Engineering and Mathematics) in heel Europa te helpen verbeteren. De site van dit centrum bevat rijk STEM-materiaal dat is ontwikkeld in het kader van door de EU gefinancierde projecten. Deze materialen zijn gebaseerd op authentieke situaties (vb. werkplek, schoolomgeving) en kunnen zowel in klaslokalen als voor de opleiding van toekomstige en praktiserende STEM-leraren worden gebruikt. Alle materialen zijn beschikbaar in het Engels.
- 4.**  **www.math4all.nl**
Op de "math4all" webpagina vindt u de bekende onderdelen zoals leerstofoverzichten, AlgebraKiT, GeoEnZo en 5000 jaar wiskunde. Ook bevat de website van Math4all 'kaarten' die zij voor u op internet verzameld hebben. Een kaart kan een uitlegfilmpje, een wiskunde-examen of een toepassing van wiskunde zijn. Alle materialen zijn beschikbaar in het Nederlands.
- 5.**  **wagingse-methode.nl/methode/het-lesmateriaal**
Op deze webpagina vindt u lesmateriaal met authentieke wiskundige voorbeelden. Elk jaar worden de lessuggesties uitgebreid en geperfectioneerd. Alle materialen zijn beschikbaar in het Nederlands.
- 6.**  **www.lessonstudy.vlaanderen.be**
Op deze website vindt u heel wat informatie over Lesson Study. Lesson Study Vlaanderen organiseert ook af en toe een conferentie of seminarie rond Lesson Study. Deze website is beschikbaar in het Nederlands.

- 7.**  **lessonstudynl.online**
Op deze website vindt u informatie over de methode Lesson Study. Ook worden er nieuwe (wetenschappelijke) inzichten gedeeld, alsook activiteiten omtrent Lesson Study in Nederland.
- 8.**  **www.walsnet.org**
De World Association of Lesson Studies (WALS) heeft tot doel het onderzoek en de praktijken gericht op Lesson Studies te promoten en te bevorderen om de kwaliteit van lesgeven en leren te verbeteren. Het biedt een platform voor onderzoekssamenwerking en informatie-uitwisseling tussen zijn leden. Het bestaat uit onderwijsonderzoekers en onderwijsprofessionals die zich inzetten voor de verbetering van de kwaliteit van het leren. Deze website is enkel beschikbaar in het Engels.
- 9.**  **www.deficambridge.org/camtrees**
Camtree, de Cambridge Teacher Research Exchange, creëert een wereldwijd platform voor leraren over de hele wereld die willen nadenken over hun praktijk en onderzoek willen doen naar het leren van leerlingen in de klas. Deze website is enkel beschikbaar in het Engels.
- 10.**  **lessonstudy.co.uk**
Lesson Study UK werd in 2011 gelanceerd door Dr. Pete Dudley als een manier om bronnen en kennis over Lesson Study in het Verenigd Koninkrijk te delen. In de afgelopen zeven jaar hebben honderdduizenden bezoekers Lesson Study ontdekt en bronnen gedownload op de site, zoals het Lesson Study-handboek dat nu in vijf talen is vertaald. Deze website is enkel beschikbaar in het Engels.
- 11.**  **www.projecttalent.be**
Op deze webpagina staat er informatie over het lesgeven en begeleiden van cognitief begaafde leerlingen. In het 2017-2018 zijn er verschillende lerarenteams aan de slag gegaan met Lesson Study om zo hun klaspraktijk te optimaliseren voor cognitief begaafde leerlingen. Als via de zoekfunctie "lesson study" ingetypt wordt, kan men een aantal lesplannen en praktijkvoorbeelden van (wiskunde)leraren downloaden.

Referenties

- Amador, J. M., & Carter, I. S. (2018). Audible conversational affordances and constraints of verbalizing professional noticing during prospective teacher lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 5-34. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9347-x>
- Australian Academy of Science (AAS). (2018). reSolve: maths by inquiry, <https://www.resolve.edu.au/>.
- Barnes, D. (2008). Exploratory talk for learning. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring talk in school: Inspired by the work of Douglas Barnes*. (pp.1-16). SAGE Publications Ltd. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446279526.n1>
- Battista, M. T. (2016). Mathematical reasoning and sense making. In *Reasoning and sense making in the mathematics classroom: Pre-K–Grade 2*. (pp. 1- 26). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 252–269.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412–446.
- Boaler, J. (2010). *The elephant in the classroom. Helping children learn & love maths*. Souvenir Press: London. UK Edition of What's Math Got To Do With It.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets. Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Bodvin, K., et al. (2020). *Lesson Study: Samen de klaspraktijk voor leerlingen verbeteren [Lesson Study: improving educational practices for students]*. Leuven, Belgium: Acco Uitgeverij.
- Boston, M. D., & Smith, M. S. (2009). Transforming Secondary Mathematics Teaching: Increasing the Cognitive Demands of Instructional Tasks Used in Teachers' Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156. <https://doi.org/10.2307/40539329>
- Brodie, K. (2009). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms (Vol. 775)*. Springer Science & Business Media.
- Cheung, W., & Wong, W. (2014). Does Lesson Study work?: A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 3(2), 137-149. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2013-0024>
- Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28–32.
- Davidson, A., Herbert, S., & Bragg, L. A. (2019). Supporting elementary teachers' planning and assessing of mathematical reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(6), 1151-1171.
- De Bruijn, I, van der Eijk, E., Greefkens, S., Kok, D., Manintveld, J., Nannings, S., van Proosdij, Gerard, Roll, C., Schaberg, G., Schippers, M., Sinkeldam, R., Smeenk–van Broekhoven, G. (2018). *Modern Mathematics. 2B vwo (12ed.)*. Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers.
- de Vries, S., Verhoef, N. & Goei, S.L. (2016). *Lesson Study: een praktische gids voor het onderwijs*. Garant Publisher.
- Dijkhuis, J.H., Admiraal, C.J., Verbeek, J.A., de Jong, G., Houwing, H.J., Kuis, J.D., ten Klooster, F., de Waal, S.K.A., van Braak, J., Lesting-Maas, J.H.M., Wieringa, M., van Maarseveen, M.L.M., Hiele, R.D., Romkes, J.E., Haneveld, M., Voets, S., Cornelisse, I. (2016). *Getal & Ruimte. 1 havo/vwo deel 1 (12ed.)*, Groningen, the Netherlands: Noordhoff Uitgevers.
- Dudley, P. (2019a). *Lesson Study: A handbook*. Cambridge University.
- Dudley, P. (2019b, August 5-8). [Paper presentation]. World Education Research Association Annual Conference, Tokyo, Japan.
- Dudley, P., Xu, H., Vermunt, J., & Lang, J. (2019). Empirical evidence of the impact of lesson study on students' achievement, teachers' professional learning and on institutional and system evolution. *European Journal of Education*, 54, 202-217. <https://doi.org/10.1111/ejed.12337>
- Educate. (2022). Enhancing differentiated instruction and cognitive activation in mathematics lessons by supporting teacher learning (EDUCATE). <http://educate-platform.com/>
- Edwards, D., & Mercer, N. (1987). *Common knowledge. The development of understanding in the classroom*. London: Methuen.
- English, L. & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education [3rd edition]* (pp. 313-335). Routledge.
- English, L. D. (Ed.). (2013). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Routledge.

- Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012). Practicing algebraic skills: A conceptual approach. *Mathematics Teacher*, 105(8), 608-614. <http://www.jstor.org/stable/10.5951/mathteacher.105.8.0608>
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal of Research in Mathematics Education*, 35, 258-291.
- Goos, M., Vale, C., & Stillman, G. (2017). Teaching secondary school mathematics: Research and practice for the 21st century. Allen & Unwin.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Education, Information* (pp. 805-842). Age Pub Inc., Greenwich.
- Herbert, S. (2021). Overcoming challenges in assessing mathematical reasoning. *Australian Journal of Teacher Education* (Online), 46(8), 17-30.
- Herbert, S., Vale, C., White, P., & Bragg, L. A. (2022). Engagement with a formative assessment rubric: A case of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 111, 101899.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics education*, 41(2), 169-202. <https://doi.org/10.2307/20720130>
- Jeannotte, D., & Kieran, C. A. (2017). Conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 96, 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Küchemann, D. E. (2010). Using patterns generically to see structure. *Pedagogies: An International Journal* 5(3), 233-250.
- Lawrence, C. A., & Chong, W. H. (2010). Teacher collaborative learning through the lesson study: identifying pathways for instructional success in a Singapore high school. *Asia Pacific Education Review*, 11(4), 565-572. <https://doi.org/10.1007/s12564-010-9103-3>
- Lewis, C. (2009). What is the nature of knowledge development in lesson study? *Educational Action Research*, 17(1), 95-110. <https://doi.org/10.1080/09650790802667477>
- Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education*, 1(3), 76-93.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: RoutledgeFalmer.
- Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.
- McCrone, S.S. (2005). The development of mathematical discussions: an investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7, 111-133.
- McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Drake, C., Turner, E., Aguirre, J., Gau Bartell, T., & Bolson, C. (2014). Use of video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of equitable practices. *Mathematics Teacher Educator*, 2(2), 108-140.
- Mercer, N. & Dawes, L. (2008). The value of exploratory talk. In N. Mercer & S. Hodgkinson (Eds.). *Exploring talk in school: Inspired by the work of Douglas Barnes* (pp.55-90). SAGE Publications Ltd. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446279526.n4>
- Mitchell, R. N., & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(6), 551-575.
- Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 293-315.
- Mueller, M., Yankelwitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning*, 7(2), 10-30.
- NCTM (n.d.). Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making. Questions and answers. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Focus_in_High_School_Mathematics/FHSM_FAQs.pdf
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- NRICH Primary Team (2014, July). Reasoning: Identifying opportunities (Article). University of Cambridge, NRICH. <https://nrich.maths.org/10990>

- OECD (2022). PISA 2022 mathematics framework. <https://pisa2022-maths.oecd.org/>
- Prediger, S., Quasthoff, U., & Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms: The case of explaining to learn and learning to explain. *Educational Studies in Mathematics*, 99(2), 161-179. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9830-7>
- Robinson, V., Hohepa, M., & Lloyd, C. (2009). School leadership and student outcomes: Identifying what works and why best evidence synthesis. Auckland: New Zealand Ministry of Education
- Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. doi:10.1007/BF00315610
- Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 221–241.
- Scherer, P. & Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning processes - Teachers jointly reflect their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal for Mathematics Teacher Education*. 9(2), 157-185.
- Seleznyov, S. (2019). Lesson study beyond Japan: evaluating impact. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(1), 2-18. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2018-0061>
- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge University Press.
- Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60, 20–37.
- Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher* 91(8), 670–675.
- Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3), 271–288. <http://www.jstor.org/stable/25619864>
- Stigler, J. and Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: The Free Press.
- Stigler, J.W., Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM Mathematics Education*, 48, 581–587. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0787-7>
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>
- Utrecht University. (2022). Primas Project. <https://primas-project.eu/modules/modules-english/>
- van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. In M. G. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134–151). New York: Routledge.
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 155–176.
- Vermunt, J., Vrikki, M., van Halem, N., Warwick, P. & Mercer, N. (2019). The impact of Lesson Study professional development on the quality of teacher learning. *Teaching and Teacher Education*, 81, 61-73. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.02.009>
- Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., Pinkernell, G. (2022). *Algebra in der sekundarstufe [Algebra in secondary schools]*. Heidelberg: Springer.
- Willems, I., & Van den Bossche, P. (2019). Lesson Study effectiveness for teachers' professional learning: a best evidence synthesis. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 8(4), 257-271. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-04-2019-0031>
- Xu, H. and Pedder, D. (2015). Lesson Study: An international review of the research. In P. Dudley (Red.), *Lesson Study: Professional learning for our time* (pp. 24-47). London, UK: Routledge.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Socio-mathematical norms, argumentations and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Ylonen, A., & Norwich, B. (2013). Professional learning of teachers through a lesson study process in England: Contexts, mechanisms and outcomes. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(2), 137-154. <https://doi.org/10.1108/20468251311323388>



Dit project is gefinancierd met steun van de Europese Commissie. Dit handboek brengt alleen de visie van de auteurs naar voren. De Commissie kan niet verantwoordelijk worden gehouden voor enig gebruik van de informatie die hierin staat.